JOSE ALVAREZ LASO, C. M. F.
PROFESOR DE FILOSOFÍA EN EL COLEGIO CLARETIANO
DE SANTA CRUZ ZINACANTEPEC

La Filosofía de las Matemáticas en Santo Tomás

EDITORIAL JUS. MEXICO, 1952.

PROLOGO

Antes de entrar en materia, conviene consignar aquí algunas advertencias. Y, primeramente, para que nadie crea que mi tesis es uno de tantos esfuerzos para hacer decir a SANTO TOMÁS, siete siglos antes, lo que ahora decimos, he de explicar

La ocasión de este tema. Muchos matemáticos modernos y no pocos filósofos de toda clase de escuelas prestan gran atención a los problemas filosóficos que la Matemática ofrece, agrupados bajo la denominación común de Filosofía de las Matemáticas.

Basta leer las últimas páginas de la monografía de W. DUVISLAV, *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart* (Berlín, 1932), para convencerse de ello.

En cambio, los escolásticos, olvidando el ejemplo de los grandes Maestros (véase la Conclusión), poco o nada han hecho en este campo estrictamente metafísico.

Es, pues, este terreno como dice el P. HOENEN, *A field of research for Scholasticism* (The Modern Schoolman 12 [Nov. 1934] 15-18).

Objeto de esta investigación. No es mi ánimo proponer una filosofía de las Matemáticas según la doctrina escolástica. Mi labor será más modesta: colaborar con mi granito de arena a este ideal preparando la historia de estos problemas en la escolástica.

Autor escogido. Y para sintetizar, en lo posible, esta historia, he escogido como autor central a SANTO TOMÁS DE AQUINO, que representa mejor que ningún otro la doctrina escolástica. El recogió toda la ciencia anterior y de él derivan más o menos todos los Escolásticos posteriores. Por esto, creo que las

Fuentes principales de este trabajo han de ser los Comentarios del Angélico a los libros del Estagirita. Así podremos estudiar paralelamente el pensamiento del Filósofo y de su mejor intérprete. Una consecuencia práctica es la manera de citar ambos lugares lo más preciso que es posible. Sólo los que hayan querido consultar alguna vez el pensamiento de SANTO TOMÁS con los otros Comentadores antiguos y modernos, verán la utilidad de estas citas.

Caracteres de mi labor. Así pues, mi trabajo es primariamente histórico. Presentar las soluciones que SANTO TOMÁS dio a los problemas que ofrecía la matemática de su siglo.

En segundo lugar mi trabajo ha de ser crítico. En dos sentidos: primero con respecto a los problemas que el mismo SANTO TOMÁS se proponía: ¿están plenamente resueltos?; luego con respecto a los problemas de ahora, ¿se les pueden aplicar las soluciones tomistas?

Método seguido. He seguido el método histórico y documental, investigando lo que de hecho dijo SANTO TOMÁS. Método diametralmente opuesto al que sigue D. GARCÍA en su artículo *De metaphysica multitudinis ordinatione* (Div. Thom. Plac. 31 [1928] 83-109; 607-638).

Uso de las lenguas. El método documental exige la menor intervención posible del investigador en los textos. Por esto, aunque el texto de la disertación está en mi lengua materna, las citas están siempre en los lenguas de los autores respectivos.

Lástima tener que decirlo, pero es un hecho, cito autores en nueve lenguas diferentes y *ni uno solo* en español.

Para mayor comodidad el índice de lugares está en latín.

División de la tesis. Había hecho un esquema casi a priori sobre los problemas filosóficos que la Matemática ofrece para ordenar según él los materiales que fuera recogiendo, pero pronto tuve la fortuna de encontrar un hermoso texto de SANTO TOMÁS que me dio una magnífica división de la materia, según expongo en el capítulo primero.

La bibliografía que aparece en las páginas siguientes, comprende sistemáticamente catalogados, todos y solos los libros y artículos empleados para componer la disertación.

Fruto de mi investigación. Creo que el mérito principal de mi trabajo está en haber encontrado en SANTO TOMÁS un esbozo de Filo-

sofía de las Matemáticas, que es necesario dibujar y colorear con mucho cuidado para poderlo presentar ante el público de nuestros días.

Defectos de mi disertación. Muchos tendrá ciertamente que delaten al principiante. Pero hay tres que yo mismo veo y que quiero confesar aquí.

Fácilmente se nota que los últimos capítulos están menos trabajados, aunque en parte se debe a que son menos filosóficos.

Luego habría que leer de nuevo todos los textos, para refrendar más la doctrina. Conozco más textos de los que aparecen usados en la disertación como fácilmente podrá constatar quien tuviere paciencia para comparar el texto con el Apéndice. Tal vez, en algún caso, habría que corregir alguna frase o pulir alguna expresión, como he tenido que hacer con respecto al número. En la primera redacción atribuía a SANTO TOMÁS una doctrina errónea sobre el objeto de la aritmética, que después he tenido la satisfacción de constatar que era sólo de JUAN DE SANTO TOMÁS y de otros que le copiaban (véase la nota 29 del cap. III).

Por fin, con respecto a las matemáticas modernas, es tanta y tan variada la literatura, que no sé si habré escogido siempre lo típico y característico.

Debo manifestar mi sincera gratitud y reconocimiento al R. P. PEDRO HOENEN, S. J., bajo cuya amable y sabia dirección he trabajado.

Debo recordar aquí la memoria del malogrado R. P. L. W. KEELER (que santa gloria haya), que tanto me ayudó en la lectura de los Manuscritos. El buen Dios, por cuya mayor gloria trabajábamos juntos en la Biblioteca Vaticana, le habrá premiado en el cielo su extremada bondad para conmigo.

México, D. F., 13 de Abril de 1952, solemnidad de Pascua.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía General y Fuentes

1. Filosofía.

A). Aristóteles.

a) Edición usada.

Aristotelis Opera Omnia, ed. I Bekker, Berolini, 1831.

b) Comentadores.

a) Griegos.

Themistius, *in Analytica Posteriora*, ed. Wallies, Berolini, vol. V, 1866.

Philoponus, *in Analytica Posteriora*, ed. Wallies, Berolini, vol. XIII, 1909.

Simplicius, *in De Anima*, ed. Hayduck, Berolini, vol. XI, 1882.

b) Escolásticos.

Averroes, *in Analytica Posteriora*, Op. omnia, Venetiis, 1552.

Grosseteste, *in Analytica Posteriora*, Venetiis, 1504.

S. Albertus M., *in Analytica Posteriora*, ed. Jammy, vol. I.

Caietanus, *in Analytica Posteriora*, Venetiis, 1554.

Niphus, *in libros Physicorum*, Venettis, 1553.

Sylvester Maurus, *Opera omnia Arist.*, ed. Ehrle, Parisiis, Lethielleux, 1855.

c) Modernos.

Ross W. D., *Aristotle's Metaphysics,* Oxford, Clarendon Press, 1924.
— *Aristotle's Physics,* Oxford, Clarendon Press, 1936.
Bonitz H., *Aristotelis Metaphysica,* Bonnae, 1849.
Hicks R. D., *De Anima libri tres,* Cambridge, 1907.

d) Subsidios.

The works of Aristotle translated into English, Editorship W. D. Ross, Oxford, Clarendon, 1928 sq.
Bonitz H., *Index Aristotelicus,* Berolini, 1870.

B). Santo Tomás.

a) Vida.

Calo P., *Vita S. Thomae Aquinatis,* ed. Prümmer, fasc. I, p. 17-55.
Tocco O.P. G., *Historia Beati Thomae de Aq.,* ed. Prümmer, fasc. II, p. 65-144.
Guidonis O.P. B., *Legenda Sancti Thomae de Aq.,* ed. Prümmer, fasc. III, p. 168-256.
Prümmer O.P. D., *De Chronologia vitae S. Thomae Aq.,* Xenia Thomistica, III, p. 1-8.
Walz O. P. AM., *Delineatio vitae S. Thomae de Aq.,* Romae, Angelico, 1927.

b) Obras.

De Rubeis, *B. Dissertationes criticae in Sanctum Thomam Aq.,* in ed. Leonina, Vol. I.
Grabmann M., *Die Werke des hl. Thomas von Aq.,* ed. 2 Beiträge XXII, 1931.
Mandonnet, *P. Des Écrits Authentiques de S. Thomas d'Aq.,* ed. 2 Fribourg, 1910.
Synave O.P. P., *Le Catalogue Officiel des oeuvres de S. Th. d'Aq.,* Arch. d.h.d. et lit. MA. 3 (1928).
Uccelli P. A., *Dissertazione sopra gli scritti autografi di S. T. d'Aq.,* Milano Bonardi, 1845.
Wild I., *Ueber die Echtheit einiger Opuscula des hl. Thomas,* Jahrb. f. Ph. u. sp. Th. 21 (1907).

c) Ediciones usadas.

In De Interpretatione, ed. Leonina, vol. I.
In Analytica posteriora, ed. Leonina, vol. I.
In VIII libros Physicorum, ed. Leonina, vol. II.
In De Caelo et Mundo, ed. Leonina, vol. III.
In De Generatione et Corruptione, ed. Leonina, vol. III.
In libros Meteorologicorum, ed. Leonina, vol. III.
In libros de Anima, ed. PIROTTA, Taurini, Marietti, 1925.
In De sensu et sensato, ed. PIROTTA, Taurini, Marietti, 1928.
In De Memoria et Reminiscentia, ed. PIROTTA, Taurini, Marietti, 1928.
In Metaphysicam, ed. CATHALA, Taurini, Marietti, 1935 [1].
In Ethicam Nicomacheam, ed. PIROTTA, Taurini, Marietti, 1934.
Quaestiones super Boetium De Trinitate:

Códices: Vat. lat. 9850, f. 90-104, saec. XIII Autógrafo [2].
Borg. lat. 15, f. 119-143, saec. XIII/XIV [3].
Ottob. lat. 198, f. 1-18, saec. XIII/XIV [4].
Vat. lat. 808, f. 21-42, saec. XV [5].
Urb. lat. 127, f. 247-276, saec. XV [6].
Edición P. A. UCCELLI, Romae, 1880.

Summa Theologica, ed. Leonina, vol. IV-XII.
Summa contra Gentiles, ed. Leonina, vol. XIII-XV.
In IV libros Sententiarum, ed. MANDONNET-Moos, Parisiis, Lethielleux, 1929.
Quaestiones De Veritate, ed. Romana Piana, vol. VIII.
Quaestiones de Potentia, ed. Romana Piana, vol. VIII.
De divinis nominibus, ed. Romana Piana, vol. IV.
De ente et essentia, ed. L. BAUR, Münster, Aschendorf, 1934.

---

[1] Adviértase para la manera de citar los libros esta correspondencia:

ARISTÓTELES:	*Α*	*α*	*Β*	*Γ*	*Δ*	*Ε*	*Ζ*	*Η*	*Θ*	*Ι*	*Κ*	*Δ*
SANTO TOMÁS:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII

[2] Descrito par. P. A. UCCELLI, *Dissertazione sopra gli scritti autografi di S. Tomaso*, Milano, Bocardi, 1845. Véase también la edición Leonina, vol. XIII, p. VII.

[3] Descrito por PELSTER en Gregorianum 6 (1925), 235-238.

[4] Descrito por PELSTER en Phil. Jahrb. 36 (1923), 46-49.

[5] Descrito por PELZER. *Codices Vaticani Latini*, vol. II, Romae, 1931, 148-150.

[6] Descrito por STORNAJOLO, *Codices Urbinates Latini*, Romae, 1902, 149-150.

Compendium Theologiae, ed. Romana Piana, vol. XVII.
De instantibus, ed. Romana Piana, vol. XVII [1].

d) Comentadores.

CAJETANUS, *In De ente et essentia*, ed. LAURENT, Taurini, Marietti, 1934.
JOANNES A. S. THOMA, *Cursus Philosophicus Thomisticus*, ed. REISER, Taurini, Marietti, 1928-37.

e) Subsidios.

FORCELLINI, *Totius Latinitatis Lexicon*, Prati, 1858.
MEYER H., *Thomas von Aquin.*, Bonn, 1938.
SCHÜTZ L., *Thomas-Lexikon*, Paderborn, Schöning, 1895.

C). Escolásticos Modernos.

FROEBES S.J. J., *Lehrbuch der experimentallen Psychologie*, Freiburg, Herder, 1923.
GREDT O.S.B. J., *Elementa Philosophiae Aristotelico-Thomisticae*, Freiburg, Herder, 1932.
HOENEN S.J. P., *Cosmologia*, Romae, P. U. Greg., 1936.

2. Matemáticas.

EUCLIDIS, *Elementorum libri XV*, ed. HEIBERG, Leipzig, Teubner, 1883-1887.
PROCLI, *In Euclidis Elementa Commentarius*, ed. FRIEDLEIN, Leipzig, Teubner, 1873.
— *Versio latina a* BARICCIO, Patavii, 1560.
BOETII, *Arithmeticae libri duo*, PL 63.
CLAVIUS S.J., *Euclidis Elementorum libri XV*, Romae, 1589.

3. Filosofía de las Matemáticas.

BARIE' G.E., *La posizione gnoseologica della Matematica*, Torino, Bocca, 1925.

[1] Auténtico según GRABMANN, *Die Werke des hl. Th. v. Aq.*

Becker O., *Die Mathematatische Existenz,* Jahrb. f. Phil. u. phän. Forsch. 8 (1927).
Brouwer S., *Over de grondglagem der wiskunde,* Amsterdam, 1907.
Duvislav W., *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart,* Berlin, Junker, 1932.
Fraenkel A., *Einleitung in die Mengenlchre,* Berlin, Springer, 1928.
García D., *Assaigs moderns per a la fonamentaciò de les Matemàtiques,* Barcelona, 1933.
Guerard des Lauriers O.P. L. B., *Analyse de l'être mathématique,* Rev. Sc. Phil. Th. 22 (1923).
Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig, Teubner, 1930.
— *Die Grundlage der Mathematik,* Berlin, Springer, 1934.
Hoelder O., *Die Mathematische Methode,* Berlin, Springer, 1924.
Peano S., *Arithmetices principia novo methodo exposita,* Taurini, 1889.
Russel B., *Einführung in die mathematische Philosophie,* München, 1923.
Timerding H. E., *Die Verbreitung math. Wissens u. math. Auffasung,* Leipzig, Teubner, 1914.
Voss A., *Ueber die mathematische Erkenntnis,* Leipzig, Teubner, 1914.
Weyl H., *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft,* Berlin, 1927.
Zindler R., *Beiträge zur Theorie der math. Erkenntnis,* Sitz. ber. Ak. Wien. Bd. 118, 1889.

4. Historia de la Filosofía.

Prantl K., *Geschichte der Logik,* Leipzig, 1927.
Uberweg, *Grundris der Geschichte der Philosophie,* I, ed. Praecter, Berlin, 1926.
Zeller, *Die Philosophie der Griechen, in ihrer geschichtliche Entwicklung,* Leipzig, 1919.

5. Historia de las Matemáticas.

Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* Leipzig, Teubner, 1892.
Montucla J., *Histoire des Mathématiques,* Paris, Agasse, 1758.
Rey A., *La Jeunesse de la Science Grecque,* Paris, Bibl. Synthèse, 1933.
Zeuthen H. G., *Die Mathematik im Altertum u im. Mittelalter,* Leipzig, Teubner, 1912.

6. *Logística.*

CARNAP R., *Abriss der Logistik*, Wien, Spinger, 1929.
LEWIS C. I., *A survey of symbolic logic*, Berkeley, 1918.
WHITEHEAD-RUSSELL, *Principia Mathematica*, Cambridge, 1925.

7. *Música y Astronomía.*

BOETII, *De Musica libri V*, P. L. 63.
PTOLOMEI, *Syntaxis Mathematica*, ed. HEIBERG, Leipzig, Teubner, 1898.
— *Versio germanica*, K. MANITIUS, Leipzig, Teubner, 1912-1913.

A. Sobre el mismo tema de la Disertación.

Bodewig E., *Die Stellung des hl. Th. v. Aq. zur Mathematik,* Arch. f. Gesch. d. Phil. 41, (1932).

Hoenen S.J. P., *A field of Research for Scholasticism,* The Modern Schoolman, 12, (1934 Nov.), 15.

B. Sobre algunos puntos de la Disertación.

Bodewig E., *Zahl und Kontinuum in der Phil. des hl. Th.,* Div. Thom. Frib. 13, (1935).

Dempf A., *Das Unendliche,* Münster, Aschendorf, 1926.

García D., *De Methaphysica multitudinis ordinatione,* Div. Thom. Plac. 31 (1928).

Hoenen S.J. P., *De origine primorum principiorum scientiae,* Gregor. 14, (1933).

Isenkrahe, C., *Die Lehre des hl. Thomas von dem Unendlichen,* Bonn, 1920.

Langenberg, G., *Des hl. Th. Lehre von Unendlichen u. die neuere Math.,* Phil., Jahrb. 30, (1917).

Mercier D., *L'unité et le nombre d'après Saint Thomas,* Rev. Neosch. 8, (1901).

Willens C., *Die obersten Seins u. Denkgesetze nach Ar. u. dem. heil. Th. v. A.,* Phil., Jahrb. 14, (1901).

AMELLI G., *Divi Thomae Aquinatis De arte musica, Mediolani,* 1880.
CARNAP, R., *Die Mathematik als Zweig der Logik,* Blät. f. deut. Phil. 4, (1930).
DE CORTE M., *La doctrine de l'intelligence chez Aristote,* Paris, Vrin, 1934.
DINGLER H., *Zum Problem des Regressus in infinitum,* Philosophia Perennis II.
DUVISLAV W., *Die Definition,* Leipzig, Meiner, 1931.
— *Zur Lehre von den sog. Schopferischen Definitionen,* Phil. Jahrb. 41, (1928).
GARCÍA D., *De rebus metaphysice perfectis,* Barcinone, 1928.
GEYSER J., *Die Erkenntnistheorie des Aristoteles,* Münnster, Schöningh, 1917.
HOENEN S.J. P., *De continuitate in crystallis,* Gregorianum 6, (1925).
MEYER H., *Die Wissenschaftslehre des Thomas von Aq.,* Phil. Jahrb. (47), 1934.
SALAMUCHA J., *Pojecie dedukcji u Aristotelesa i zw Tomaza s Akwinu Warsawa* 1930.
SCHOLTZ H., *Die Axiomatik der Alten,* Blät. f. teut. 4, (1930).
— *Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut?,* Kantstudien 33, (1928).
SIEWERTH G., *Die Metaphysik der Erhenntnis nach Thom. v. A.,* München, 1933.
SYNAVE O.P. P., *La révelation des verités divines naturelles d'Après S. Thomas,* Mélanges Mandonnet I.

INTRODUCCION

LAS MATEMATICAS EN SANTO TOMAS

SANTO TOMÁS estudió la Aritmética y la Geometría con las demás asignaturas del *Quadrivium* en la Universidad de Nápoles [1] por los años de 1236 a 1239 [2].

Bien aprovechado saldría de estas clases, cuando tanto abundan en sus obras filosóficas y teológicas las alusiones a las Matemáticas [3].

---

[1] Véanse los párrafos en que los tres primeros biógrafos de SANTO TOMÁS hablan de sus estudios en Nápoles:

"Misit pater filium Neapolim, ut esset grammatica, dialectica et rethorica eruditus adprime. Nam cum Martinum praeceptorem in grammatica in brevi excederet, traditus est magistro Petro ybernico, qui in logicalibus et naturalibus eum instruxit". CALO P., *Vita S. Thomae A.*, ed. PRÜMMER, p. 20.

"Unde puer de utriusque parentis consilio Neapolim mittitur et sub magistri Martini in grammaticalibus et logicalibus, et Magistri Petri de Ibernia studiis in naturalibus edocetur". Tocco G., *Historia B. Thomae de Aq.*, ed. PRÜMMER, p. 70.

"In brevi itaque tempore cum in grammaticalibus et logicalibus ac in naturali philosophia plurimum proficisset...". GUIDONIS B., *Legenda Sancti Thomae de Aq.*, ed. PRÜMMER, p. 70.

[2] El P. PRÜMMER (*Chronologia vitae S. Thomae Aq.*, en Xenia Thomistica) pone el año 1235 como el primer año de su estancia en Nápoles. El P. WALZ (*Delineatio vitae S. Thomae de Aquino*, Romae, Angelico, 1927, p. 16) pone "anno 1236 vel 1239".

[3] Véase el índice de los lugares en que SANTO TOMÁS habla de Matemáticas, puesto como Apéndice a esta disertación.

No es mi ánimo estudiar en esta introducción un punto [4], que no tiene ningún interés ni para las Matemáticas ni para la Historia [5].

Sólo quiero hacer constar los datos necesarios para demostrar que SANTO TOMÁS podía reflexionar sobre las Matemáticas.

Conocía bien [6] a EUCLIDES [7]. Pocas veces cita [8] la aritmética de BOECIO [9]; pero todos saben que los libros VII-IX de EUCLIDES son pura aritmética.

Sabido es también el lugar que ocupan las Matemáticas en la clasificación general de las ciencias que hace SANTO TOMÁS [10].

---

[4] Desde el punto de vista sistemático estudió este punto H. MEYER en varios artículos del Philosophisches Jahrbuch publicados después aparte. Sobre las Matemáticas trata 47 (1934) 441-464.

[5] Tal vez, el nombre de SANTO TOMÁS deba figurar en la historia de las Matemáticas por otro concepto. Véase, en efecto, lo que dice TIMERDING (*Die Verbreitung mathematisches Wissens und mathematischer Auffassung*, Leipzig, Teubner, 1914):

"Neben der bereits gennanten Euklidübersetzung des Campanus sind die Uebersetzungen anzuführen, die wie es heisst, auf Wunsch des Thomas von Aquino (1274) Wilhelm von Mörbecke von der Heronischen Katoptrik und der Archimedischen Schriften anfertigte". ZEUTHEN (*Die Mathematik in Altertum und im Mittelalter*, Leipzig, Teubner, 1912), atribuye este mérito a WITELO. Véase CANTOR, *Vorlesunger über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, 1892, vol. II, p. 89.

[6] Véanse, por ejemplo, estos textos:

Explica el nombre Elemento	III Met. 1.8, n. 424.
" " "	V Met. 1.4, n. 801.
Cita el I libro de Euclides	III De An. 1.1, n. 577.
III	II De cae 1.26, n. 6.
VI	De mem. 1.7, n. 392.
X	I An. Pos. 1.4, n. 13.

[7] Según MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques*, Paris, 1758, I, p. 213), sólo en el siglo XIII empezaron los latinos a conocer a EUCLIDES en el mismo texto.

[8] Véanse, por ejemplo:

De pot. q. 3, a. 16 sed contra 4.
I Sent. d. 24; q. 1 ob. 2.
De Trin. q. 1. a. 4 ad 2.
q. 4 á. 1 arg. 1.

[9] Véase el juicio que hace MONTUCLA (vol. I, p. 492), de las obras matemáticas de BOECIO:

"Son arithmétique et sa géométrie ne sont proprement que des traductions libres du premier (Nicomaque) et du dernier (Euclide), où il nous a conservé beacoup de traits interésants de l'histoire de ces sciences".

[10] Véase, por ejemplo, en el novísimo libro de H. MEYER, *Thomas von Aquino*, Bonn, 1938, p. 399-407.

Quiero cerrar esta breve nota con una frase del gran historiador de las Matemáticas M. CANTOR, que demuestra el gran afecto y admiración que profesaba a TOMÁS DE AQUINO: "Der Mathematiker nennt sie (Albertus Magnus und Thomas von Aquin) mit Bedauern seiner Wissenschaft frend" (*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, 1892, vol. II, p. 86).

CAPITULO I

LA ESTRUCTURA DE LAS MATEMATICAS

Dice ARISTÓTELES, al comenzar sus ***'Αναλύτικα ὕστερα*: *Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως*** (An. Post. A I, 71 a I). Y pone las matemáticas como primer miembro de su demostración inductiva: ***Αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου τοῦ τρόπου περαίνονται*** (An. Post. A I, 71 a 3) [1].

EUCLIDES [2] consagró en sus Elementos esta división. Abren su obra los ***ὅροι***, los ***αἰτήματα*** y las ***κοιναὶ ἔννοιαι*** y siguen una a una las proposiciones con su respectiva demostración [3].

El matemático se ocupa exclusivamente de la parte segunda. Saca

---

[1] Véase H. SCHOLTZ, *Die Axiomatik der Alten*, Blät. f. deut. Phil. 4 (1930). 259-278.

[2] Dice ABEL REY (*La jeunesse de la Science Grecque*, Paris, Bibl. de Synthèse hist., 1933, p. 302, nota): "n'oublions pas qu'Euclide est déjà influencé par la forme d'exposition aristotelicienne".

Sería interesante precisar esta influencia. Porque, tal vez, dado el empirismo característico de ARISTÓTELES, habría que decir que la exposición aristotélica es fruto de las teorías geométricas de su tiempo, sistematizadas más tarde por EUCLIDES, como parecen suponerlo el modo de probar su tesis fundamental y las frecuentes alusiones a las Matemáticas en su ***'Αναλύτικα ὕστερα***.

[3] Dice SANTO TOMÁS: "In principio EUCLIDES ponuntur definitiones quae sunt sequentium demonstrationum principia" (in Phys. E 3, 226 b 33, 1.5, n. I). Véase también in Met. A 992, b 26, 1.17, n. 268.

consecuencias de los principios que admite. En cambio, la primera parte, la *γνῶσις προϋπαρχοῦσα*, es estrictamente [4] filosófica [5].

Sigue ARISTÓTELES precisando este conocimiento previo con ejemplos matemáticos.

Διχῶς δ'ἀναγκαῖον προγινώσκειν· τὰ μὲν γάρ, ὅτι ἔστι, προϋπολαμβάνειν ἀναγκαῖον: τὰ δὲ τί τὸ λεγόμενόν ἔστι, ξυνιέναι δεῖ· τὰ δ'ἄμφω. Οἷον, ὅτι μὲν ἅπαν ἢ φῆσαι ἢ ἀποφῆσαι ἀληθές, ὅτι ἐστί: τὸ δὲ τρίγωνον, ὅτι τοδὶ σημαίνει: τὴν δὲ μονάδα ἄμφω καὶ τί σημαίνει καὶ ὅτι ἐστίν (An. Post. A 1, 71 a 11-16).

Un moderno diría que se requieren de antemano tres cosas. Cono-

---

[4] Una observación sobre el uso de la palabra filosofía en esta disertación. Para SANTO TOMÁS como para todos los antiguos, la matemática era una parte de la filosofía. Ahora están completamente separadas. Por tanto, cuando SANTO TOMÁS dice "Philosophia prima" o "metaphysica", uso simplemente filosofía, sin intentar por esto excluir del campo de la Filosofía la Física de los antiguos o sea la Cosmología y Psicología de los modernos.

Valga esta advertencia para todos los casos en que ocurran expresiones como estas: El matemático supone, el filósofo prueba; el matemático demuestra, el filósofo analiza, etc.

[5] Dice SANTO TOMÁS:

"Geometra probat sua principia secundum quod assumit formam Philosophi primi, idest metaphysici" (in An. Post. A 12,77 b 5,1.21, n. 5).

"Irrationabiles et importunae dubitationes de principiis in doctrinis mathematicis, non pertinet ad mathematicum ut eas removeat" (in Phys. Θ 3, 253 b 2, 1.5, n. 3).

Lo mismo había dicho al principio del mismo libro (1.1, n. 3).

Véanse igualmente in Met. Γ 2, 1005 a 12, 1.4, n. 586
3, 1005 a 30, 1.5, n. 592 y 595
in Eth. Γ 5, 1112 b 12, 1.8, n. 474
Z 3, 1139 b 31, 1.3. n. 1149

Una aplicación práctica in Phys. A 2, 185 a 1, 1.2, n. 4y7

PROCLO observaba también (ed. FRIEDLEIN, Leipzig, Teubner, 1873, p. 75, 14): *οὐδεμία γὰρ ἐπιστήμη τὰς ἑαυτῆς ἀρχὰς ἀποδείκνυσιν, οὐδὲ ποιεῖται λόγον περὶ αὐτῶν, ἀλλ' αὐτοπίστως ἔχει περὶ αὐτάς, καὶ μᾶλλόν εἰσιν αὐτῇ καταφανεῖς τῶν ἐφεξῆς καὶ τὰς μὲν οἶδεν δι' αὐτάς, τὰ δὲ μετὰ ταῦτα δι' ἐκείνας.*

cer el léxico científico. Postular [6] la existencia [7] del objeto. Admitir el valor de los axiomas.

SANTO TOMÁS comenta magistralmente este párrafo. Y, de paso, caracteriza muy bien, con tres pinceladas, la estructura peculiar de las Matemáticas.

Bríndale ocasión para este cuadro sintético el *τρίγωνον* de ARISTÓTELES [8]. Salta a la vista una dificultad. *Τρίγωνον* ocurre mil veces

---

[6] Para ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS lo que una ciencia postula otra lo demuestra. (Véase, por ejemplo, in An. Post. A 2,72 a 14, 1.5, n. 7).

Para muchos modernos es una simple comodidad. Véase a este propósito esta frase de R. RUSSELL (*Einführung in die Mathematische Philosophie*, München, 1923, p. 72).

"Die Methode, das zu 'postulieren', was man braucht, hat viele Vorteile. Es sind dieselben, wie die Vorteile des Diebstahls gegenüber des ehrlichen Arbeit".

[7] Qué significa modernamente esta existencia del objeto, puede verse, por ejemplo, en O. BECKER *Die Mathematische Existenz*, Jahrb. f. Phil. u. phän. Forschung 8, (1927), 461-472.

[8] Es curiosa la historia de este *τρίγωνον* en los intérpretes aristotélicos. Baste indicar aquí los primeros indicios de lo que aparece claramente en SANTO TOMÁS.

TEMISTIO precisa ya el fin de conocer la significación de las propiedades (in An. Post. A I, ed. WALLIES, p. 2, 1.31 es.): *ἐφ' ὧν δὲ αὐτὸ τοῦτο ζητοῦμεν, εἰ ἔστιν ἢ μή, καὶ μανθάνομεν, οἷον εἰ ἔστι θεός, ἆρα ἔστι πρόνοια ἐπὶ τῶν τοιούτων τί σημαίνει τὸ λεγόμενον ὄνομα ξυνιέναι πρότερον ἀναγκαῖον.*

FILOPONO, aunque a otro propósito, propone ya el mismo ejemplo (in An. Post. A I, ed. WALLIES, p. 8, l. 21 ss.): *οἷον ὡς ἐπὶ παραδείγματος ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι Εὐκλείδου ζητοῦντι... κ. τ. λ.*

AVERROES insinúa el mismo ejemplo: "de triangulo autem aequalium laterum" (in An. Post. A I, ed. Venetiis 1552, f. 128v b; cf. ib. f. 240 a); pero no le atribuye el fin de TEMISTIO: "quoniam, quod ipsa (sc. triangulus, circulus) sint, manifestum est per se" (ib. f. 129 a).

Fin y ejemplo aparecen agudamente unidos en el famoso comentario de ROBERTO GROSSETESTE: "Attulit autem Aristoteles exemplum de passione quaesita: triangulum, quia hoc est primum quaesitum in Geometria. Est enim hoc primum theorema; Supra omnem datam lineam est triangulus aequilaterus. Et est linea data concessum. Et non solum aequilaterum quaeritur, sed hoc totum triangulus aequilaterus et sunt duo syllogismi ad ostendendum primo quod supra omnem datam lineam est triangulus et deinde alii tres ad ostendendum quoniam aequilaterus" (ed. Venetiis, 1504, f. ii b).

Más claramente todavía en SAN ALBERTO MAGNO, que insinúa además los dos oficios del triángulo: sujeto y pasión. "Nec est inconveniens quod triangulus denominative dictus sit passio: quia quamvis triangulus secundum quod dicit

como sujeto. Sólo aquí como propiedad [9]. ¿Es un desliz de ARISTÓTELES? ¿Debemos entender *τρίγωνον* como propiedad aritmética de algunos números? ¿Es una propiedad del espacio? [10].

He aquí la solución de SANTO TOMÁS:

"Exemplificat autem de triangulo, de quo oportet praescire quoniam nomen ejus hoc significat, quod scilicet in sua definitione continetur.

Cum enim accidentia quodam ordine ad substantiam referantur, non est inconveniens id quod est accidens in respectu ad aliquid, esse etiam subjectum in respectu alterius.

Sicut superficies est accidens substantiae corporalis: quae tamen superficies est primum subjectum coloris.

Id autem quod est ita subjectum, quod nullius est accidens, substantia est.

Unde in illis scientiis, quarum subjectum est aliqua substantia, id quod est subjectum nullo modo potest esse passio, sicut est in philosophia prima, et in scientia naturali quae est de subjecto mobili.

---

subjectum et figuras speciem, sit subjectum multarum passionum, tamen ipse triangulus circa figuram passio est, quae probatur de subjecto, sicut patet in omnibus figuris quae sunt de compositione trianguli, sicut est prima Euclidis, et multae aliae quae de compositione trianguli sunt vel hujus trianguli vel illius in specie triangulationis determinari" (in An. Post. trac. I, cap. IV, ed. *Jammy*, vol. I, p. 520 a).

Pero ninguno aprovechó la ocasión que se ofrecía, para delinear la estructura característica de las Matemáticas, como hizo SANTO TOMÁS.

[9] El ejemplo matemático más común de ARISTÓTELES: *τὸ τρίγωνον δυσὶν (δυοῖν) ὀρθαῖς ἴσας ἔχει (ἔχει τὰς γωνίας), τὸ τρίγωνον δύο ὀρθὰς ἔχει κ. τ. λ.*

Vea quien lo desee en BONITZ, *Index Aristotelicus*, 770 b 21-29 los lugares en que ocurre este ejemplo. Noto de paso que el *τρίγωνον* que nos ocupa (71 a 15) no sale para nada en el Index.

[10] Son otras tantas hipótesis de G. R. G. MURE en los Posterior Analytics de la magnífica edición inglesa *The Works of Aristotle translated into English* (vol. I, p. 71 a 12 nota): "Elsewhere *τρίγωνον* as a rule appears as one of the subjects of which the geometer assumes the meaning and being and demonstrates properties: here it seems to be instanced as a property, of which only the meaning is assumed. This chapter is, however, preliminary, and probably Aristotle is only drawing the distinction, which appears in ch. 10, 76 b 16 ff., between tacit and explicit assumptions. Possibly, however, Aristotle is thinking of "triangular" as an attribute of number, cf. note on 73 a 10, or as a particular modification of *σημεῖα καὶ γράμμαι*, the *πρῶτα* of space".

In illis autem scientiis, quae sunt de aliquibus accidentibus, nihil prohibet id, quod accipitur ut subjectum respectu alicujus passionis, accipi etiam ut passionem respectu anterioris subjecti.

Hoc tamen non in infinitum procedit. Est enim devenire ad aliquod primum in scientia illa, quod ita accipitur ut subjectum, quod nullo modo ut passio; sicut in m a t h e m a t i c i s s c i e n t i i s, quae sunt de quantitate continua vel discreta.

Supponuntur enim in his scientiis ea quae sunt prima in genere quantitatis, sicut unitas et linea et superficies et alia hujusmodi.

Quibus suppositis, per demonstrationem quaeruntur quaedam alia, sicut triangulus aequilaterus, quadratum in geometricis et alia hujusmodi [11]. *Quae quidem demonstrationes quasi operativae dicuntur, ut est illud, Super rectam lineam datam triangulum aequilaterum constituere.*

Quo adinvento, rursus de eo aliquae passiones probantur, sicut quod ejus anguli sunt aequales aut aliquid hujusmodi.

Patet igitur quod triangulus in primo modo demonstrationis se habet ut passio, in secundo se habet ut subjectum.

Unde Philosophus hic exemplificat de triangulo ut est passio, non ut est subjectum, cum dicit quod de triangulo oportet praescire quoniam hoc significat" (in An. Post. A I, 71 a 15, l. 2. n. 5).

Distingue, pues SANTO TOMÁS tres estadios característicos de las matemáticas [12].

El primer estadio supuesto, recibido. Nótese que Supponuntur es palabra técnica [13]. Tiene una significación opuesta a investigar y de-

[11] E. BODEWIG (*Die Stellung des hl. Thomas von Aquino zur Mathematik*, Arch. f. Gesch. d. Phil. 41, 1932, p. 412) termina aquí su cita, mutilando así este magnífico texto, sin dejar ver los tres estadios.

[12] PROCLO insinúa ya de algún modo esta estratificación. Véase, por ejemplo, la materia que señala al primer *τμῆμα* que distingue en el libro primero de los *Elementos* (ed. FRIEDLEIN, Leipzig, Teubner, 1873, p. 83, 8-11): *τὸ μὲν πρῶτον τῶν τριγώνων τὰς γενέσεις καὶ τὰς ἰδιότητας ἐμφανίζει κατά τε γωνίας καὶ πλευρὰς καὶ ποιεῖται συγκρίσεις αὐτῶν πρὸς ἄλληλα κ. τ. λ.*

[13] Véase M. ALTENBURG, *Die Methode der Hypothesis bei Platon. Aristoteles und Proklus*, Marburg, 1905, p. 122-137.

mostrar [14]. Todos los axiomas y definiciones en este sentido, son suposiciones. Sólo comprende este estadio, según SANTO TOMÁS, "prima in genere quantitatis".

El segundo estadio se construye racionalmente. "Per demonstrationem quaeruntur...", "...demonstrationes quasi operativae...". Pone dos ejemplos concretos. El triángulo equilátero con indicación expresa de la proposición euclidea. Y el cuadrado que tiene en los *Elementos* una proposición equivalente. Luego añade "et alia hujusmodi" que permite la más amplia interpretación.

El tercer estadio deduce las propiedades de la noción construida. "Passiones probantur". El ejemplo de SANTO TOMÁS está muy bien escogido. Pasa de equilátero a equiángulo, que es sin duda la primera propiedad. Luego, como antes, añade una frase general: "aut aliquid hujusmodi".

Vamos a constatar en el ejemplo concreto de SANTO TOMÁS esta estratificación de las Matemáticas.

Creo que el mejor modo para conocer, hasta el último detalle, todo lo que se presupone en Matemáticas es estudiarlas en una lengua extranjera. El texto original de EUCLIDES ofrece esta ventaja.

Ante todo precisa saber la morfología griega y unas cincuenta palabras que se necesitan para entender plenamente la primera demostración [15].

---

[14] BONITZ hace *προϋπολαμβάνειν* sinónimo de *προγινώσκειν*. Index Arist. 654 b 23. Sobre "supponere", véase CAYETANO in An Post. A 11, ed. Venetiis 1554, F. 53v-54.

[15] De ellas las partículas gramaticales más comunes como *ὁ, ὅπερ, ὅς, ὅτις, τις, αὐτός, ἑαυτός, μόνος, καί, δή, δὲ* y *μέν*.

Otras palabras de uso vulgar, como *πέρας, ἑκατέρα, ἀλλήλων*.

Ciertos verbos usuales, como *εἰμι, δεῖ, δίδωμι, γράφω, καλέω, ποιέω, ἔχω* y *περιέχω*.

Ciertos verbos adquieren en Geometría una significación especial, pero no están definidos, por ejemplo, *κεῖμαι, ἐπιζεύγνυμι, ἄγω, προσπίπτω, συνίστημι, τέμνω*.

Otro tanto cabe decir de las proposiciones, como *ἀπό, ἐντός, ἐξ, ἐπί, κατά, πρός, ὑπό*.

Ciertas locuciones lógicas, como *δείγνυμι* y *αἰτέω, ἄρα* y *ἐπεί, πᾶς* y *οὐθείς*.

Otras aritméticas, aunque comunísimas, como *εἱς, τρεῖς, ἴσος*.

Otras, por fin, geométricas que se usan sin definición explícita: *πλάτος* y *μῆκος, πλευρὰ* y *μέρος*. Llama sobre todo la atención que *διάστημα* no esté definida explícitamente.

Estas son suposiciones implícitas, anteriores al mismo libro. Luego vienen las suposiciones explícitamente consignadas en los *Elementos.*

Bastan para la primera proposición estas d e f i n i c i o n e s:

I. ***Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.***

II. ***Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.***

III. ***Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.***

IV. ***Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.***

V. ***Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.***

VI. ***Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γράμμαι.***

VII. ***Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.***

XIII. ***Ὅρος ἐστιν, ὅ τινός ἐστι πέρας.***

XIV. ***Σχῆμά ἐστιν τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.***

XV. ***Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προς πίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.***

XVI. ***Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.***

XIX. ***Σχήματα εὐθύγραμμα ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ κ. τ. λ.***

XX. ***Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσόσκελες δὲ...***

Dos *Postulados* son explícitamente recordados en la demostración:

I. ***Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.***

III. ***Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.***

Pero, tal vez, habrá que añadir otros dos:
Uno que Dos líneas se cortan en un punto.
Otro que explicase la convención de los signos.

Euclides repite su primer a x i o m a en la primera demostración con las mismas palabras: ***Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.***

Pero, al menos se requieren también otros dos principios. El que Aristóteles pone como ejemplo de axioma en el texto que está ex-

plicando SANTO TOMÁS: ἅπαν ἢ φῆσαι ἢ ἀποφῆσαι.

Y el primer principio fundamental que estudia ARISTÓTELES en el libro de la Metafísica:

ἀδύνατον ἅμα εἶναι καὶ μὴ εἶναι [16].

Todo esto es necesario para poder entender la primera proposición de EUCLIDES, que SANTO TOMÁS propone como tipo del segundo estadio [17].

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ [18].

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ: πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση: ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση: τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα: καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

---

[16] ARISTÓTELES llama estos principios *κοιναὶ δόξαι* (Met. B 2, 996 b 27), "the ancestor of *κοιναὶ ἔννοιαι*", como observa W. D. ROSS comentando este paso (*Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, I, 229).

[17] F. BAROCIO en su edición latina del Comentario de PROCLO al primer libro de los *Elementos* de EUCLIDES (ed. Patavii, 1560) pone antes de la primera proposición "Finis Principiorum" (pág. 115). Pero, según observa G. FRIEDLEIN en el prólogo de su edición crítica del texto griego de PROCLO (Leipzig, Teubner, 1873, p. viii) nada de esto se encuentra en los códices.

[18] Siguen los tres argumentos para probar que es equilátero, a que alude ROBERTO GROSSETESTE (véase nota 4), puestos en forma por CLAVIUS (*Euclidis Elementorum libri XV*, ed. 2, Romae, 1589, v. I, p. 76).

Queda, pues, construído el triángulo equilátero. No sólo sabemos lo que significa esta expresión, como podemos saber lo que significa "triángulo rectángulo equiángulo", sino que está demostrada rigurosamente su "existencia". Tócanos ahora, en el tercer estadio, estudiar sus propiedades.

Debería empezar con el ejemplo de SANTO TOMÁS: todo triángulo equilátero es equiángulo. Pero no se encuentra explícitamente entre las proposiciones del primer libro de EUCLIDES, ni es el caso de proponer aquí una demostración. Por otra parte, este tercer estadio puede constatarse fácilmente, con seguir leyendo las proposiciones de EUCLIDES, sobre todo las que los Comentadores llamaron teoremas [19].

Si la estratificación de las matemáticas que propone SANTO TOMÁS es una imagen perfecta de la Geometría de EUCLIDES, podemos presumir que corresponderá también a las Matemáticas modernas.

Las tres escuelas que suelen distinguirse en el estudio filosófico de las Matemáticas divergen notablemente en muchos puntos [20], pero convienen todas en asignar dos tipos de nociones. Unas previas, fundamentales (Grundbegriffe), cuyo origen explican muy diversamente. Otras construidas, derivadas, definidas por las anteriores (abgeleitete Begriffe) [21].

Dice, por ejemplo, HOELDER en su excelente libro *Die mathematische Methode* (Berlin, Springer, 1924, S. 10).

"Mustert man die Begriffe, mit denen der Geometer arbeitet, so erkennt man einen wesentlichen Unterschied. Einige dieser Begriffe, sie

---

[19] PROCLO, por ejemplo, decía (ed. FRIEDLEIN, Leipzig, Teubner, 1873, p. 77, 7-12): *πάλιν δ' αὐτὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς προβλήματα διαιρεῖται καὶ θεωρήματα, τὰ μὲν τὰς γενέσεις περιέχοντα τῶν σχημάτων καὶ τὰς τομὰς καὶ τὰς ἀφαιρέσεις ἢ πρόσθεσις... τὰ δὲ καθ' αὐτὰ συμβεβηκότα ἑκάστοις δεικνοῦντα*. Sigue luego proponiendo otros criterios para la división (p. 78-80).

Y termina observando como las distingue el mismo EUCLIDES (p. 81, 9-12).

Los problemas acaban: *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι*.

Los teoremas así: *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*. Dice lo mismo CLAVIUS (*Euclidis Elementorum libri XV*, ed. 2, Romae, 1589, v. I, p. 23 ss.).

[20] Una exposición de conjunto de estas tres escuelas con sus rasgos característicos puede verse en D. GARCÍA *Assaigs moderns per a la fonamentació de les matemàtiques* (Mem. Soc. Cat. de Ciencies I, 1933, iv), que presenta una bibliografía selecta para cada escuela y para el estudio general de estas cuestiones.

[21] Términos de R. CARNAP *Abriss der Logistik*, Wien, Sprigner, 1929, p. 70. K. ZINDLER (Sitzungsber. d. phil. hist. Kl. d. Kgl. Akad. d. Wiss, zu Wien; Bd. 118, 1889, IX, S. 55), llama al primer grupo de nociones axiomatische Begriffe. Otros las llaman primitive Begriffe, primitive ideas. Véase en CARNAP, p. 111, Grundbegriff.

mögen uns nun zugekommen sein, woher sie wollen, werden in der geometrischen Betrachtung selbst schlechthin als gegeben angesehen. Zu diesen Begriffen gehören der Punkt, die Gerade, die Ebene. Von anderen Begriffen wird eine Definition gegeben, die meistens darin besteht, dass eine Konstruktion zur Erzeugung des entsprechenden Gegenstandes mitgeteilt wird, wobei dann die Begriffe der ersten Art als bekannt vorausgesetzt und benutzt werden".

Esta distinción se hace más clara con el método axiomático. Toda la teoría de los conjuntos (Mengenlehre) tiene una sola idea fundamental en la exposición axiomática de FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre* (Berlin, Springer, 1928, S. 271). Las cuatro ideas fundamentales que propuso PEANO en sus *Arithmetices Principia nova methodo exposita* de 1889 se han reducido a una sola [22].

Esta doble serie de nociones responde a la concepción de SANTO TOMÁS, que colocaría en su segundo estadio todas estas nociones derivadas.

Este esbozo irá coloreándose poco a poco en los capítulos sucesivos.

El primer estadio será estudiado en seis capítulos. El siguiente estudiará el origen de las primeras nociones matemáticas en general. Luego, uno las aritméticas; otro las geométricas y otro las comparará mutuamente. Otro una idea fundamentalísima de las Matemáticas: el Infinito. Terminará el estudio de esta etapa preliminar con la consideración de los axiomas y postulados [23].

Los capítulos octavo, noveno y décimo corresponden al segundo estadio. El octavo estudia las definiciones y el noveno los teoremas constructivos: ambos la "existencia matemática". El décimo las matemáticas aplicadas.

Por fin el tercer estadio será estudiado en los dos últimos capítulos. Primero las demostraciones matemáticas y los teoremas deductivos. Luego, como remate de todo, la certeza matemática.

---

[22] Véanse tres tipos de este sistema en R. CARNAP *Abriss der Logistik*, Wien, Springer, 1929, p. 74-75.

[23] Por ser esta parte la más filosófica, sus capítulos son más numerosos y más densos. Para que no hubiese una desproporción tan grande entre las tres partes, no he dividido la disertación en las tres partes que exige el texto que sirve de fundamento.

CAPITULO II

ORIGEN DE LAS PRIMERAS NOCIONES MATEMATICAS

El primer estadio de las Matemáticas abarca las primeras nociones y los axiomas [1].

El matemático "supone" la "existencia" y significación de sus primeras nociones. La demostración toca al filósofo [2].

Dejando para el segundo estadio [3], la consideración general de la "existencia" en Matemáticas, estudiaré sólo en este capítulo el origen de la "existencia lógica" de las primeras nociones.

No se trata de estudiar históricamente cómo adquirió LEIBNIZ o CANTOR la noción de número o de superficie, sino de justificar lógicamente un proceso psicológico, que, en la práctica, tal vez ningún matemático ha seguido, dado el influjo enorme de la educación.

El problema puede formularse así: ¿Cómo justifica SANTO TOMÁS lógica y críticamente, el origen de las primeras ideas matemáticas?

---

[1] Según el texto (in An. Post. A 1, 71 a 5, 1. 2, n. 5) que hemos analizado en el capítulo anterior, el primer estadio comprende sólo "prima in genere quantitatis"; pero, eso es lo característico de las Matemáticas, ya que los axiomas son suposiciones comunes a todas las ciencias.

[2] Véanse los textos citados en el capítulo anterior (nota 5).

[3] En el segundo estadio que comprende las definiciones y los teoremas constructivos, entra de lleno la cuestión de la "existencia matemática", tratada principalmente en el capítulo noveno.

Pone Aristóteles [4] como principio básico de su teoría del conocimiento: *μὴ αἰσθανόμενος μηθὲν οὐθὲν ἂν μάθοι οὐδὲ ξυνίοι* (De An. Γ 8, 432 a 7, l. 13, n. 791).

Luego, refiriéndose a la ciencia, dice: *ἡ μὲν γὰρ ἐμπειρία τέχνην ἐποίησεν* (Met. A I, 891 a 3, l. 1, n. 18). Y en otro lugar: *ἐκ γὰρ τῆς κατὰ μέρος ἐμπειρίας τὴν καθόλου λαμβάνομεν ἐπιστημήν* (Phys. H 3, 247 b 20, L. 6, n. 5).

Y, más concretamente, refiriéndose a las Matemáticas: *καὶ τὰ ἐξ ἀφαιρεσέως λεγόμενα ἔσται δι' ἐπαγωγῆς γνώριμα ποιεῖν* (An. Post. A 18, 81 b 3, l. 30, n. 5).

Santo Tomás [5] comenta claramente estos textos, demostrando su valor general. Insiste sobre todo en el último, porque las ideas matemáticas, por su carácter abstracto, podían parecer una excepción.

"Cum enim experientia a sensu ortum habeat, ut dicitur in principio Metaphysicae (A 1, 981 a 3), videtur quod hoc locum non habeat in his quae sunt abstracta a materia sensibili.

Et ideo ad hoc excludendum dicit (Aristóteles).quod etiam ea quae dicuntur per abstractionem, contingit nota facere per inductionem; quia in unoquoque genere abstractorum sunt quaedam particularia, quae non sunt separabilia a materia sensibili, secundum quod unumquodque eorum est hoc" (in An. Post. A 18, 81 b 3, l. 30, n. 5).

Las ideas matemáticas, pues, lo mismo que las otras, tienen su primer origen en los sentidos y su última perfección en el entendimiento.

Fácil es determinar el origen sensible de las primeras ideas matemáticas.

---

[4] Una amplia exposición de esta doctrina se puede ver en J. Geyser *Die Erkenntnistheorie des Aristoteles*, Münster, Schöningh, 1917, Kap. XII.

[5] Diversos puntos interesantes de la sensación, según Santo Tomás, están claramente expuestos en G. Siewerth *Die Metaphysik der Erkenntnis nach Thomas von Aquin*, I. Teil Die sinnliche Erkenntnis, München u. Berlin, Oldenbourg, 1933, p. 44 ss.

La unidad y el número, la extensión y la figura son, según Aristóteles, *αἰσθητὰ κοινά* [6]. Y *αἰσθητά κοινά* es uno de los modos de *αἰσθητῶν καθ' αὑτά* [7], es decir, que impresionan realmente [8] los órganos sensitivos de varios sentidos, al menos de la vista y del tacto [9]. Esta impresión es real, pero mediata.

Dice Aristóteles [10] que los órganos se mueven al percibir el movimiento o el reposo, la cantidad o el número [11].

Santo Tomás reduce los sensibles comunes a la extensión [12], que se percibe mediatamente por la diversa impresión que produce una

---

[6] *κοινὰ δὲ [αἰσθητὰ] κίνησις, ἠρεμία, ἀριθμός, σχῆμα, μέγεθος.*

De An. B 6, 418 a 14 Santo Tomás l, 13, n. 386.

οἷον κινήσεως, στάσεως, σχήματος, μεγέθους, ἀριθμοῦ, ἑνός.

De An. Γ 7, 425 a 15 Santo Tomás l. 1, n. 577.

[7] *λέγεται δὲ τὸ αἰσθητὸν τριχῶς, ὧν δύο μὲν καθ' αὑτά φαμεν αἰσθάνεσθαι, τὸ δὲ ἓν κατὰ συμβεβηκός. τῶν δὲ δύο τὸ μὲν ἴδιόν ἐστιν ἑκάστης αἰσθήσεως, τὸ δὲ κοινὸν πασῶν.*

De An. B 6, 418 a 8 Santo Tomás l. 13, n. 383.

[8] *τῶν δὲ κοινῶν ἤδη ἔχομεν αἴσθησιν κοινήν, οὐ κατὰ συμβεβηκός.*

De An. Γ 1, 425 a 27 Santo Tomás l. 1, n. 580.

"Quod igitur facit differentiam in ipsa passione vel alteratione sensus, habet per se habitudinem ad sensum et dicitur sensibile per se (in De An. B 6, 418 a 17, l. 13, n. 393.

"Per se quidem sentitur illud, quod per se passionem sensui corporali inferre potest. Per se autem potest aliquid passionem inferre aut sensui inquantum est sensus (sensibile commune), aut huic sensui in quantum est hic sensus (sensibile proprium)" IV Sent. d. 49, q. 2, a 2.

[9] *μέγεθος γὰρ καὶ σχῆμα... κοινὰ τῶν αἰσθησέων ἐστιν, εἰ δὲ μη πασῶν, ἀλλ' ὄψεώς γε καὶ ἀφῆς.*

De Sen. 4, 442 b 5 Santo Tomás l. 11, n. 155.

[10] *ταῦτα γὰρ πάντα (κίνησις, στάσις, σχῆμα, μέγεθος, ἀριθμός, ἕν) κινήσει αἰσθανόμεθα.*

De An. Γ 1, 425 a 16 Santo Tomás l. 1, n. 577 dice: " 'motu' idest quadam immutatione".

[11] Véase De Corte *La doctrine de l'intelligence chez Aristote*, Paris, Vrin, 1934, p. 255 sq.

[12] "Sensibilia vero communia omnia reducuntur ad quantitatem" (S. Th. I, q. 78, a 3, ad 2).

"Omnia autem haec quae dicuntur sensibilia communia, pertinent aliquo modo ad continuum, vel secundum mensuram ejus ut magnitudo, vel secundum divisionem ut numerus, vel secundum terminationem ut figura, vel secundum distantiam et propinquitatem ut motus" (in De Sen. I, 437 a 5, l. 2, n. 29).

misma cualidad sensible, por ejemplo el color, según se encuentre en una mayor o menor extensión [13].

Más concretamente.

La *extensión* y su especie, la *figura*, según ARISTÓTELES, se sienten mediante una impresión [14]. Según SANTO TOMÁS, porque la extensión es la base de las cualidades sensibles que no pueden obrar sin ella [15].

Sobre el *Número* dice ARISTÓTELES textualmente: ***ὁ δ' ἀριθμὸς τῇ ἀποφάσει τοῦ συνεχοῦς καὶ τοῖς ἰδίοις: ἑκάστη γὰρ ἓν αἰσθάνεται αἴσθησις*** (De An. Γ I, 425 a 19-20).

SANTO TOMÁS, al comentar este paso, se entretiene en explicar las relaciones entre el número y el continuo, sin tratar de aclarar algún tanto las obscuridades que ofrece el texto del Filósofo [16]. Precisamente omite las dos frases que más dificultad ofrecen en el original. Del ***καὶ τοῖς ἰδίοις*** ni vestigio se encuentra en su comentario [17]. Luego dice: "Manifestum etiam quod unusquisque sensus per se cognoscit unum, ut

---

[13] "Qualitates enim sensibiles movent sensum corporaliter et situaliter. Unde aliter movent secundum quod sunt in majori vel minori corpore" (in De An. B 6, 418 a 18, l. 13, n. 394.

[14] *ταῦτα γὰρ πάντα κινήσει αἰσθανόμεθα, οἷον μέγεθος κινήσει· ὥστε καὶ σχῆμα· μέγεθος γάρ τι τὸ σχῆμα.*

De An. Γ 1, 425 a 16 SANTO TOMÁS I, 1, n. 577.

[15] "Manifestum est enim quod magnitudo immutat sensum, cum sit subjectum qualitatis sensibilis puta coloris aut saporis, et qualitates non agunt sine suis subjectis. Ex quo apparet, quod figuram etiam cognoscimus cum quadam immutatione, quia figura est aliquid magnitudinis, quia consistit in conterminatione magnitudinis. Est enim figura quae termino vel terminis continetur, ut dicitur in I EUCLIDIS" (in De An. Γ 1, 425 a 16, l. 1, n. 577).

[16] "Numerus etiam cognoscitur per negationem continui, quod est magnitudo. Numerus enim rerum sensibilium ex divisione continui causatur; unde et proprietates numeri per proprietates continui cognoscuntur. Quia enim continuum divisibile est in infinitum, et numerus in infinitum crescere potest, ut patet ex III Physicorum" (in De An. Γ 1, 425 a 18, l. 1, n. 578). Este texto será estudiado detenidamente en el capítulo quinto.

[17] La "versio antiqua" tiene: Numerus vero negatione continui et proprii. Unusquisque enim unum sentit sensus.

immutatus ab uno objecto" (n. 578), pero no dice la relación que existe entre esta frase y la anterior que ARISTÓTELES expresa con el *γὰρ* [18].

Esta oscuridad del texto del Filósofo y el silencio de su mejor intérprete nos obligan a confesar que la doctrina aristotélico-tomista sobre la percepción sensible del número no está suficientemente desarrollada como lo está la doctrina sobre la extensión y la figura.

Estos distintos elementos que nos suministran los sentidos externos sirven a la i m a g i n a c i ó n para formar las primeras síntesis matemáticas que después ha de elaborar el entendimiento.

"In mathematicis, dice SANTO TOMÁS, oportet cognitionem secundum judicium terminari ad imaginationem" (in Boet. de Trin. q. 6, a. 2).

"Rationes mathematicorum sunt rerum imaginabilium", dice en otra parte (in Eth. Z. 9, 1142 a 18, l. 7, n. 1209).

Hace luego un hermoso paralelo entre el modo de conocer del filósofo natural y el del matemático. El entendimiento conoce siempre las esencias universales; pero el natural conoce los singulares con los sentidos externos y el matemático con la imaginación [19].

Por esto, nos imaginamos esta línea, este círculo [20]. En la imaginación añadimos cantidades a cantidades [21]. Son los fantasmas mate-

---

[18] Tal vez, como insinúa SIMPLICIO (ed. HAYDUCK, p. 184, 5-9) hay que unir el *καὶ τοῖς ἰδίοις* (a 19) con el *πάντα κινήσει αἰσθανόμεθα* (a 17). Pero, como advierte HICKS (De Anima, Cambridge 1907, p. 429). "Such a huge parenthesis seems too much even for ARISTOTELES". Este mismo autor explica cómo se pueden entender refiriéndose sólo al número el *καὶ τοῖς ἰδίοις* y el *ἑκάστη γὰρ ἓν αἰσθάνεται αἴσθησις* que traduce: "Each sensation has a single object".

Semejante traducción da también J. A. SMITH *The Works of Aristoteles translated into English*, vol. III, p. 425 a 19.

[19] "Sicut per naturalia ostenditur, quod intellectus, qui cognoscit quidditates naturalium sit alius a sensu qui cognoscit ipsa naturalia singularia, ita ex mathematicis ostenditur, quod intellectus qui cognoscit quod quid est ipsorum sit aliud ab imaginativa virtute quae apprehendit ipsa mathematica" (in De An. Γ 4, 425 a 18, l. 8, n. 715.

"...sensu interiori quo percipimus imaginabilia, sicut in mathematicis cognoscimus extremum trigonum, idest singularem triangulum imaginatum, quia etiam illic, idest in mathematicis statur ad aliquod singulare imaginabile, sicut etiam in naturalibus statur ad aliquod singulare sensibile" (in Eth. Z 9, 1142 a 20, l. 8, n. 1214.

[20] "in abstrahendo a materia sensibili imaginamur hanc lineam et hunc circulum" (in Boet. de Trin. q. 4, a. 2 ad 3).

[21] "Eadem ratione videntur magnitudines mathematicae quae in imaginatione consistunt, esse infinitae: quia qualibet magnitudine data, possumus imaginari majorem" (in Phys. Γ 4, 203 b 22, l. 7, n. 6).

máticos que acompañarán siempre nuestros raciocinios más abstractos [25] y que son el fundamento de la abstracción matemática.

SANTO TOMÁS explica en muchos lugares de sus obras esta abstracción matemática. Pero en dos ocasiones estudia de propósito esta cuestión. La primera vez en las cuestiones sobre el opúsculo *De Trinitate* de BOECIO.

La segunda en su comentario a los *Físicos* de ARISTÓTELES.

Conviene analizar detenidamente ambos textos y compararlos mutuamente, para formarnos una idea exacta de la concepción que SANTO TOMÁS tenía formada de la abstracción matemática.

BOECIO en su tratado *De Trinitate* [26] explica la triple división de las ciencias que hace ARISTÓTELES (Met. E 1, 1026 a 18), y les señala

[25] "Necesse est quod intelligibilia intellectus nostri sint in speciebus sensibilibus secundum esse, tam illa quae dicuntur per abstractionem, scilicet mathematica, quam naturalia... Oportet cum aliquis speculatur in actu, quod simul formet sibi aliquod phantasma" (in De An. Γ 8, 432 a 5, l. 12, n. 791).

[26] Este tratado en la edición de MIGNE (PL 64, 1247-56) tiene este título: "Quomodo Trinitas unus Deus ac non tres dii". SANTO TOMÁS en su prólogo lo llama: "De Trinitate unius simplicis Dei" y al indicar la división del texto (lección primera). "De Trinitate Personarum et unitate divinae Essentiae", pero en general lo suelen llamar simplemente "De Trinitate".

Todos convienen en atribuir a SANTO TOMÁS un Comentario sobre este Tratado (véase DE RUBEIS, Diss. VII, c. IV, n. 1; ed. Leonina, vol. I, p. cxxxvi); pero hay una dificultad sobre su integridad.

De hecho el Tratado comprende un prólogo (1247-1248 B) y seis capítulos (1248C-1256A) que SANTO TOMÁS considera al dividir su texto en dos partes.

Pero tanto en las ediciones como en los cuatro Códices que he visto (Vat. lat. 808; Ottob. lat. 198; Urb. lat. 127; Borg. lat. 15) y en el mismo autógrafo del SANTO, que se conserva en la Biblioteca Vaticana (Vat. lat. 9850) el comentario no termina ni siquiera la primera parte.

GRABMANN (*Die Werke des hl. Thomas von Aquino*, Beiträge, XXII, p. 312) dice sencillamente: "Diese Schrift bliebt unvollendet und wurde auch nicht forgesetzt".

Así lo dice, en efecto, el catálogo de NICOLÁS TREVET († 1328) (ed. *Synave, Le Catalogue Officiel des oeuvres de Saint Thomas d'Aquin*, en Arch. d'Hist. doct. et litt. du Moyen Age 3 [1928] 56-58):

"Super librum ejusdem (Boetii) de Trinitate expositionem inchoatam nequaquam perfecit".

Pero un detalle del Códice autógrafo, hizo sospechar a UCCELLI que tal vez se ha perdido una parte del Comentario (ed. *Uccelli*, p. 346 nota).

SANTO TOMÁS suele indicar al fin de sus cuadernos el principio del siguiente con las palabras iniciales encasilladas (véanse los reversos de los folios 13,

el método que deben seguir: "In naturalibus rationabiliter, in mathematicis disciplinabiliter, in divinis intellectualiter", PL 64, 1250.

Esto ofrece materia a SANTO TOMÁS para dos cuestiones. Una sobre la división de las ciencias. Otra sobre los métodos que BOECIO les atribuye.

"Circa primum quaeruntur quatuor". Primero, en general, la conveniencia de la división; luego, en particular, cada una de las tres ciencias.

A nosotros nos interesa sólo el tercer artículo. Dice el texto de BOECIO: "Mathematica, sine motu, inabstracta: haec enim formas corporum speculatur sine materia, ac per hoc sine motu; quae formae cum in materia sunt ab ea separari non possunt". PL 64, 1250.

SANTO TOMÁS glosa el texto en su Comentario y formula después esta cuestión: "Tertio. Utrum mathematica consideratio sit sine motu et materia?"

Propuestos siete argumentos por la negativa y tres *Sed contra*, comienza la solución de la dificultad.

El texto, que aparece corrompido en varios pasos importantes en todas las ediciones, ha sido confrontado con el propio autógrafo de SANTO TOMÁS, y con otros cuatro códices de la Biblioteca Vaticana.

23, 43, 47, 53, 57, 63, 69, 77 y 89 del autógrafo de la Summa contra Gentes, Postillas in Isaiam y Comentario a Boecio. Vat. Lat. 9850).

Y en el folio 103 en que termina la respuesta a la última objeción del artículo cuarto de la cuestión sexta, se encuentra también la respectiva casilla, que contiene precisamente las palabras del texto de Boecio con que debería empezar la lección tercera.

Más que el comentario mismo, son importantes las seis cuestiones que comprende: de donde se deriva el título que suelen dar al Opúsculo "Praeclarae Quaestiones super librum Boethii de Trinitate".

Para la Filosofía de las Ciencias son de gran importancia sobre todo las dos últimas cuestiones.

La circunstancia de ser 24 los artículos de dichas cuestiones sirve al P. SYNAVE (*La Révélation des vérités divines naturelles d'après S. Thomas* en *Mélanges Mandonnet*, I, p. 361), para fijar la composición de este opúsculo en el tiempo que va del 24 de abril al 21 de julio de 1256.

El P. WALZ (*Chronotaxis Vitae et operum S. Thomae de Aquino*, Angelicum 16 [1939], p. 470) señala los años 1257-58.

Cf. *Thomas von Aquin in librum Boethii de Trinitate quaestiones quinta et sexta*, Nach dem Autograph Cod. Vat. Lat. 9850 mit Einleitung herausgegeben von Paul WYSER O. P. Professor an der Universität Freiburg in der Schweiz. Fribourg, Société Philosophique, Louvain, 1948.

1. "Ad evidentiam hujus quaestionis oportet scire, quomodo intellectus per suam operationem abstrahere potest.

2. Sciendum igitur, secundum Philosophum III de anima (*Γ* 6, 430 a 26-28, l. 11, n. 746), quod *duplex est operatio intellectus*:

Una, quae dicitur intelligentia indivisibilium, qua cognoscitur de unaquaque re quid est.

Alia vero est, qua componit et dividit, scilicet, enuntiationem negativam vel affirmativam formando.

3. *Et hae quidem duae operationes duobus quae sunt in rebus respondent.*

Prima quidem operatio respicit ipsam *naturam* rei, secundum quam aliqua res intellecta aliquem gradum in entibus obtinet, sive sit res completa, ut totum aliquod, sive incompleta, ut pars vel accidens.

Secunda operatio respicit ipsum *esse rei,* —quod quidem resultat ex aggregatione principiorum rei in compositis, vel ipsam simplicem naturam rei concomitantur, ut in substantiis simplicibus [24].

4. Et quia veritas intellectus est ex hoc quod conformatur rei, patet quod *secundum hanc secundam operationem* intellectus abstrahere non potest *vere,* quod secundum rem conjunctum est, quia in abstrahendo significatur esse separatio secundum ipsum esse rei, sicut si abstraho hominem ab albedine, dicendo: "Homo non est albus", significo separationem esse in re. Unde, si secundum rem, homo et albedo non sunt separata, erit intellectus falsus. Hac igitur operatione, intellectus *vere abstrahere non potest,* nisi ea quae sunt secundum rem separata, —ut cum dicitur: "Homo non est asinus—".

5. Sed secundum *primam operationem* potest separare ea quae secundum rem separata non sunt, *nec tamen omnia sed aliqua* [25].

[24] Más ampliamente explica esta correspondencia en dos lugares del Primer libro de las Sentencias, I, d. 19, a 5, a. 1, c; d. 38, q. 1, a 3 c. En su comentario al *περὶ ἑρμηνείας* 3, 16 b 22 (I, l. 5, n. 22), expone el fundamento de esta correspondencia que luego aplica al modo de conocer Dios las proposiciones (I Sent, d. 33, q. 1, a. 1 ad 1; S. Th. I, q. 14, a. 14 ad 2).

[25] "Abstrahere contingit *dupliciter*. Uno modo per modum compositionis et divisionis; sicut cum intelligimus aliquid non esse in alio, vel esse separatum ab eo. Alio modo, per modum simplicis et absolutae considerationis, sicut cum intelligimus unum nihil considerando de alio".

S. Th. I, q. 85, a. 1 ad 1. Luego aplicando esta distinción a la verdad de la abstracción repite lo mismo.

6. Cum enim unaquaeque res sit intelligibilis secundum quod est actu, ut divitur in X Met. (I 10, 1051 a 31, l. 10, n. 1894) oportet quod ipsa natura, sive quidditas rei, intelligatur

vel

secundum quod est actus quidam, sicut accidit de ipsis formis et substantiis simplicibus;

vel

secundum id quod est actus ejus, sicut substantiae compositae per formas suas;

vel

secundum id quod est ei loco actus, sicut materia prima per habitudinem ad formam et vacuum per privationem locati;
et hoc est illud ex quo unaquaeque natura suam naturam sortitur.

7. Quando, ergo, hoc per quod constituitur ratio naturae, per quod ipsa natura intelligitur, habet ordinem et dependentiam ad aliquid aliud, tunc constat quod natura illa sine illo alio intelligi non potest;

sive sit conjuncta conjunctione illa qua pars conjungitur toti, —sicut pes non potest intelligi sine intellectu animalis, quia id a quo res habet rationem pedis, dependet ab eo a quo est animal;

sive etiam sit conjuncta per modum quo forma conjungitur materiae, sicut pars composito, vel accidens subjecto, —sicut simum non potest intelligi sine naso;

sive etiam sint secundum rem separata, —sicut pater non potest intelligi sine intellectu filii, quamvis illae relationes inveniantur in diversis rebus.

8. Si vero unum ab altero non dependeat secundum id quod constituit rationem naturae, tunc unum potest [26] ab altero abstrahi per intellectum, ut sine eo intelligatur

---

Alude también con respecto a esta doble distinción con respecto a la verdad (in De An. Γ 7, 431 b 15, l. 12, n. 781-782).

[26] Todas las ediciones que he podido ver, incluso la de P. A. Uccelli que intenta ser crítica dicen: "Tunc unum *non potest*". Pero este "non" no se encuentra en el autógrafo del Santo que he podido ver en la Biblioteca Vaticana (Vat. Lat. 9850, f. 97 b, línea-12), ni en los otros tres Códices que Uccelli usó, según he podido constatar (Vat. Lat. 808, f. 36 b, l. 2; Ottob. Lat. 198, f. 14 a l. 30; Urb. Lat. 127, f. 269 a l. 1). El editor ni siquiera como lecciones variantes lo advierte. Tampoco se encuentra en el Borg. Lat. 15, f. 137v a l. 15.

non solum si sint separata secundum rem, ut homo et lapis,

sed etiam si secundum rem conjuncta sint

sive ea conjunctione qua pars et totum conjungitur, —sicut littera potest intelligi sine syllaba et animal sine pede, *sed non e converso;*

sive etiam sint conjuncta per modum quo forma conjungitur materiae, et accidens subjecto, —sicut albedo potest intelligi sine homine *et e converso* [27].

9. Sic igitur intellectus *distinguit* unum ab altero *aliter et aliter* secundum operationes:

quia secundum illam qua componit et dividit, distinguit unum ab alio per hoc quod intelligit unum alii non inesse;

in operatione vero qua intelligit quid est unumquodque, distinguit unum ab alio, dum intelligit quid est hoc, nihil intelligendo de alio, neque quod sit cum eo, neque quod sit ab eo separatum.

10. Unde ista distinctio non proprie habet nomen separationis sed prima tantum. Haec autem distinctio recte dicitur *abstractio,* sed tunc tantum quando ea quorum unum sine alio intelligitur, sunt simul secundum rem.

---

[27] Nótese el "non e converso" del primer caso
y el " et e converso" del segundo.
Y compárese con la diferencia que señala Santo Tomás entre estos dos modos de abstracción:

"Inter has autem abstractiones haec est differentia,

quod in abstractione, quae fit secundum universale et particulare, non remanet id a quo fit abstractio. Remota enim ab homine differentia rationali, non remanet in intellectu homo, sed solum animal.

In abstractione vero quae attenditur secundum formam a materia, utrumque manet in intellectu. Abstrahendo enim formam circuli ab aere, remanet seorsum in intellectu nostro et intellectus circuli et intellectus aeris" S. Th. I, q. 40, a. 3 c. En otro lugar (Comp. Theol. c. 62) dice de estos dos modos de abstracción: "quodammodo contrario modo se habent". Cayetano explica ampliamente esta y otras diferencias entre ambas abstracciones en su famoso Comentario al *De Ente et Essentia,* (ed. *Laurent,* p. 6).

Non enim dicitur animal a lapide abstrahi, si animal absque intellectu lapidis intelligatur.

11. Unde, cum abstractio non possit esse, proprie loquendo, nisi conjunctorum secundum rem, secundum duos modos conjunctionis praedictos, scilicet, qua pars et totum conjungitur, sive forma et materia: *duplex est abstractio*:

una qua forma abstrahitur a materia,
alia qua totum a partibus [28].

---

[28] En muchos casos habla SANTO TOMÁS de esta doble abstracción. Véanse aquí esquemáticamente las diversas denominaciones que usa:

1) A "forma abstrahitur a materia".
B "totum (abstrahitur) a partibus
in Boet. de Trin. q. 5, a. 3, n. 11.

2) A "abstractio formae a materia sensibili".
B "abstractio universalis a particulari".
in Boet. de Trin. q. 5, a. 3, n. 22.

3) A "Abstractio formae a materia".
B "abstractio universalis a particulari".
Comp. Theol. c. 62.

4) A "forma abstrahitur a materia".
B "universale abstrahitur a particulari".
S. Th. I, q. 40, a. 3 c.

5) A "mathematica abstracta a sensibilibus".
B "universalia..., abstracta a singularibus".
in Met. A 6, 987 b 14, l. 10, n. 159.

6) A "formae quaedam (abstrahuntur) a materia sensibili".
B "universale (abstrahitur) a particulari".
in Met. B 2, 997 b 1, l. 7, n. 405.

7) A "separantur mathematica a materia sensibili".
B "separantur universalia a particularibus".
in Met. Δ 1,1069 a 36, l. 2, n. 2426.

8) A "abstrahimus mathematica a sensibilibus".
B "a particularibus ad universalia".
in De An. A 2, 404 b 19, l. 4, n. 48.

9) A (mathematicus abstrahit) "a materia sensibili et naturali".
B "abstrahere universale a particulari".
in Phys. B 2, 193 b 33, l. 3, n. 5.

10) A ...
B "abstrahere universale a particulari vel speciem intelligibilem a phantasmatibus".
S. Th. I, q. 85, a. 1 ad 1.

12. Forma autem illa potest abstrahi a materia cujus essentiae ratio non dependet a tali materia. Ab illa autem materia non potest forma abstrahi per intellectum a qua suae essentiae ratio dependet.

13. Unde cum omnia accidentia comparentur ad substantiam sicut forma ad materiam, et cujuslibet accidentis ratio dependeat a substantia, impossibile est aliquam talem formam a substantia separari.

14. Sed accidentia superveniunt [29] substantiae quodam ordine. Nam primo advenit ei quantitas, deinde qualitas, deinde passiones et motus.

15. Unde quantitas potest intelligi in substantia antequam intelligantur in ea qualitates sensibiles, a quibus dicitur materia sensibilis [30]; et sic secundum rationem suae substantiae non dependet quantitas a materia sensibili, sed intelligibili tantum [31]. Substantia enim remotis accidentibus non remanet nisi intellectu comprehensibilis, eo quod sensibiles potentiae non pertingunt usque ad substantiae comprehensionem.

16. *Et de his abstractis est Mathematica,* quae considerat quantitates et ea quae quantitates consequuntur, ut figuram et hujusmodi.

17. Totum etiam non a quibuslibet partibus [32] abstrahi potest.

---

[29] Las ediciones dicen: "adveniunt", pero el autógrafo dice claramente "*superveniunt*" (Vat. Lat. 9850, f. 97^{v} a l. 25).

[30] "Materia sensibilis dicitur materia corporalis secundum quod subjacet qualitatibus sensibilibus, scilicet calido et frigido, duro et molli, et hujusmodi".

S. Th. I, q. 85, a. 1 ad 2.
Véanse también S. Th. III, q. 77, a. 2 ad 4.
De Ver. q. 2, a. 6 ad 1.

[31] "Materia... intelligibilis dicitur substantia secundum quod subjacet quantitati" S. Th. I, q. 85, a. 1 ad 2.

También De Ver. q. 2, a. 6 ad 1.

[32] El sentido exige quibuslibet y no quibusdam como ponen las ediciones.

El Códice Urb. Lat. 127 (f. 269^{v} b, l. 6) pone quibuslibet con todas las letras.

Los Códices Vat. Lat. 808 (f. 36^{v} b, l. 8), Ottob. Lat. 198 (f. 14 b l. 7) y Borg. Lat. 15 (f. 137^{v} b l. 12) ponen una abreviatura que debe leerse quibuslibet y de ninguna manera quibusdam.

El autógrafo (Vat. Lat. 9850, f. 97^{v} a l. 35) pone una abreviatura muy confusa; pero parece que debe leerse quibuslibet y ciertamente no puede leerse quibusdam.

18. Sunt enim quaedam partes a quibus totius ratio dependet, quando scilicet hoc est esse toti tali quod ex talibus partibus componitur, sicut se habet syllaba ad litteram, et mixtum ad elementa: et tales *partes* dicuntur *speciei et formae,* sine quibus totum intelligi non potest cum ponantur in ejus definitione.

19. Quaedam vero partes sunt quae accidunt toti in quantum hujusmodi, sicut semicirculus se habet ad circulum.

20. Accidit enim circulo quod sumantur per divisionem duae ejus partes aequales vel inaequales, vel etiam plures; non autem accidit triangulo quod in eo designentur tres lineae, quia ex hoc triangulus est triangulus.

21. Similiter etiam per se competit homini quod inveniantur in eo anima rationalis et corpus compositum ex quatuor elementis: unde sine his partibus homo intelligi non potest: et sic oportet poni in definitione hominis quae sunt partes speciei et formae; sed digitus, pes, manus, et hujusmodi sunt praeter intellectum hominis: unde ex illis ratio essentialis hominis non dependet, unde sine his intelligi potest: sive enim pedes habeat, sive non, dummodo ponatur conjunctus ex anima rationali et corpore composito ex quatuor elementis propria commixtione, quam requirit talis forma, est homo. Et hae partes dicuntur *partes materiae,* quae non ponuntur in definitione totius, sed magis e converso; et ita se habent ad hominem omnes partes signatae, sicut haec anima, hoc corpus, et hoc os, et hujusmodi. Hae enim sunt partes materiae: quae quidem sunt partes Sortis et Platonis, non tamen hominis, inquantum est homo; et ideo potest homo abstrahi per intellectum ab illis partibus: et talis abstractio est universalis a particulari [33].

22. *Et ita* sunt *duae abstractiones intellectus.*

Una quae respondet unioni formae et materiae, vel accidentis et subjecti: et haec est *abstractio formae a materia sensibili.*

Alia quae respondet unioni totius et partis; et huic respondet *ab-*

---

[33] Habla también SANTO TOMÁS de estas dos clases de partes: a) in An. Post. A 4, 73 a 36, l. 10, n. 3; b) in Phys. B 3, 194 b 25, l. 5, n. 4 y 9; c) in De Caelo Pr. n. 2; d) S. Th. III, q. 90, a. 2 c.

Las define claramente in Met. Δ 24, 1023 b 1 s, l. 21, n. 1089.

Dice que las "partes speciei" deben entrar en la definición in Met. Z 9, 1034 b 32, l. 9, n. 1467-1481.

stractio universalis a particulari, quae est abstractio totius, in quo consideratur absolute natura aliqua secundum suam rationem essentialem ab omnibus partibus, quae non sunt partes speciei, sed sunt partes accidentales.

23. Non autem inveniuntur abstractiones eis oppositae, quibus pars abstrahatur a toto, vel materia a forma: quia pars non potest abstrahi a toto per intellectum, si sit de partibus materiae in quarum definitione ponitur totum: vel potest etiam sine toto esse, si sit de partibus speciei, sicut linea sine triangulo, vel littera sine syllaba, vel elementum sine mixto. *In his autem quae secundum esse possunt esse divisa, magis habet locum separatio quam abstractio.*

24. Similiter autem cum dicimus formam abstrahi a materia, *non intelligitur de forma substantiali,* quia forma substantialis et materia sibi correspondens dependent ab invicem, ut unum sine alio non possit intelligi, eo quod proprius actus in propria materia sit; sed *intelligitur de forma accidentali* quae est quantitas et figura, a qua quidem materia sensibilis per intellectum abstrahi non potest, cum qualitates sensibiles non possint intelligi non praeintellecta quantitate, sicut patet in superficie et colore: nec etiam potest intelligi esse subjectum motus, quod non intelligitur quantum. Substantia autem quae est materia, intelligibilis esse potest sine quantitate: unde considerare substantiam sine quantitate, magis pertinet ad genus separationis quam abstractionis.

25. Sic igitur in operatione intellectus triplex dictinctio invenitur [34].

26. *Una* secundum operationem intellectus componentis et dividentis, quae separatio dicitur proprie; et haec competit scientiae divinae, sive Metaphysicae.

27. *Alia* secundum operationem quae format quidditates rerum, quae est abstractio a materia sensibili et haec competit Mathematicae [35].

---

[34] Véase S. Th. I, q. 85, a 2, ad 2.
Esquemáticamente se puede expresar así:

De la materia
- sensible
  - "signata"→abstrae la Física
  - común
- inteligible
  - "signata" →abstrae la Matemática
  - común→abstrae la Metafísica

[35] Una falsa lectura se ha venido sucediendo durante siglos en este lugar hasta en la última edición "crítica" de P. A. Uccelli.

28. *Tertia* secundum compositionem universalis a particulari et haec competit etiam Physicae et est communis omnibus scientiis: quia in omni scientia praetermittitur quod est per accidens et accipitur quod est per se.

29. Et quia quidam non intellexerunt differentiam duorum ultimorum a primo, inciderunt in errorem, ut ponerent mathematica et universalia a sensibilibus separata, ut Phytagorici et Platonici" [36].

El otro texto está al comentar el capítulo en que habla Aristóteles de la diferencia entre la Física y las Matemáticas.

En menos palabras dice claramente lo que antes hemos visto [37].

Dicen las ediciones Metaphysicae en vez de Mathematicae. Claro que el contexto exige Mathematicae, pero tuve curiosidad de buscar en los Manuscritos.

En el autógrafo del Santo (Vat. Lat. 9850 f. 97 v l. 10), dice claramente Mathematicae abreviando sólo el final de la palabra (compárese con el mathematicus de la línea —2 de la misma columna).

Otros dos Códices, aunque abrevian Methaphysicae y Mathematicae, las distinguen bien (Vat. Lat. 808, f. 37 a l. —5 Metaphysicae, l. —3 Mathematicae; Urb. Lat. 127, f. 270 a l. 32 Metaphysicae, l. 35 Mathematicae).

El Ottob. Lat. 198 usa una misma abreviatura en los dos lugares (f. 14 b l. 3 y 5).

El Borg. Lat. 15, al revés de las ediciones, dice las dos veces Mathematicae (f. 138 a l. 24 y 26).

[36] In Met. A 6, 987 b 14, l. 10, n. 156-157 explica ampliamente el origen de este error de Platón y cómo lo evita Aristóteles con su doctrina de la abstracción.

[37] Para quien tenga interés en comparar detalladamente ambos textos los he numerado. He aquí la tabla de correspondencia:

Phys.	Boet.	Boet.	Phys.
1	11.22	1-3	
2	8	4	12
3	8	5-7	
4		8	2.3
5		9-10	
6	11.22	11	1.6; 10
7	14	12-13	
8	15	14	7
9	15	15	8.9
10	11.22	16	11
11	16.27	17-21	
12	4	22	1.6.10
		23-26	
		27	11
		28-29	

1. "Quia enim mathematicus considerat lineas et puncta et superficies et hujusmodi et accidentia eorum non inquantum sunt termini corporis naturalis, ideo dicitur abstrahere a materia sensibili et naturali.

2. Et causa quare potest abstrahere, est ista, quia secundum intellectum sunt abstracta a motu.

3. Ad cujus causae evidentiam considerandum est quod multa sunt conjuncta secundum rem, quorum unum non est de intellectu alterius: sicut album et musicum conjunguntur in aliquo subjecto, et tamen unum non est de intellectu alterius, et ideo potest separatim intelligi sine alio. Et hoc est unum intellectum esse abstractum ab alio.

4. Manifestum est autem quod posteriora non sunt de intellectu priorum, sed e converso: unde priora possunt intelligi sine posterioribus et non e converso.

5. Sicut patet quod animal est prius homine et homo est prius hoc homine (nam homo se habet ex additione ad animal, et hic homo ex additione ad hominem; et propter hoc homo non est de intellectu animalis, nec Socrates de intellectu hominis: unde animal potest intelligi absque homine et homo absque Socrate et aliis individuis).

6. Et hoc est abstrahere universale a particulari.

7. Similiter autem inter accidentia omnia quae adveniunt substantiae, primo advenit ei quantitas, et deinde qualitates sensibiles et actiones et passiones et motus consequentes sensibiles quantitates.

8. Sic igitur quantitas non claudit in sui intellectu qualitates sensibiles vel passiones vel motus: claudit tamen in sui intellectu substantiam.

9. Potest igitur intelligi quantitas sine materia subjecta motui et qualitatibus sensibilibus, non tamen absque substantia.

10. Et ideo hujusmodi quantitates et quae eis accidunt, sunt secundum intellectum abstracta a motu et a materia sensibili, non autem a materia intelligibili, ut dicitur in VII Met. (Z 10, 1036 a 10, l.10, n. 1496).

11. Quia igitur sic sunt abstracta a motu secundum intellectum, quod non claudunt in suo intellectu materiam sensibilem subjectam motui; ideo mathematicus potest ea abstrahere a materia sensibili.

12. Et nihil differt quantum ad veritatis considerationem, utrum sic vel sic considerentur. Quamvis enim non sint abstracta secundum esse, non tamen mathematici abstrahentes ea secundum intellectum mentiuntur; quia non asserunt ea esse extra materiam sensibilem (hoc enim esset mendacium) sed considerant de eis absque consideratione materiae sensibilis, quod absque mendacio fieri potest; sicut aliquis potest considerare albedinem absque musica, et vere, licet conveniant in eodem subjecto: non tamen esset vera consideratio si assereret album non esse musicum" (in Phys. B 2,193 b 31-35, l. 3, n. 5).

La abstracción matemática consiste, pues, en una operación del entendimiento que entiende la cantidad y sus accidentes, sin entender las cualidades sensibles que en la realidad le acompañan.

Se funda en la composición de cantidad y substancia que se han entre sí como forma y materia y supone que la cantidad es el primer accidente.

Una vez hecha esta operación intelectual, las ideas matemáticas quedan desligadas de todo contacto con la materia mudable, sin exceder las fuerzas de nuestro entendimiento: por eso son las ideas más claras de la inteligencia humana [38].

Pocos matemáticos modernos se han preocupado de este análisis psicológico del origen de los primeros conceptos matemáticos [39] y algunos lo han hecho influenciados de antemano por prejuicios filosóficos [40].

---

[38] "Ostendit quod ille modus, qui est simpliciter optimus non debet in omnibus quaeri; ...Sed mathematica sunt abstracta a materia et tamen non sunt excedentia intellectum nostrum: et ideo in his est requirenda certissima ratio" (in Met. α 3, 995 a 1, l. 5, n. 336).

[39] Es típica la manera de comenzar HILBERT sus *Grundlagen der Geometrie* (ed. 7 Leipzig, Teubner, 1930, p. 2):

"Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge der ersten Systeme nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit A, B, C...; die Dingen des zweiten Systeme nennen wir *Geraden* und bezeichnen sie mit a, b, c... die Dinge des dritten Systeme nennen wir *Ebene* und bezeichnen sie mit α, β, γ..."

[40] Por ejemplo la monografía de G. E. BARIE *La posizione gnoseologica della Matematica*, Torino, Bocca, 1925.

Suelen dejar esta cuestión a los Psicólogos [41].

Aurelio Voss, famoso por su libro *Das Wesen der Mathematik,* ha publicado en la colección Die Kultur der Gegenwart de Teubner una monografía *Ueber die mathematische Erkenntnis* [42].

Una de sus partes es precisamente Die Psychologische Seite der mathematische Erkenntnis.

Si comparamos lo que dice de propósito este matemático de nuestro siglo con lo que dijo de paso un teólogo del siglo XIII, encontramos ciertamente muchas deficiencias en la doctrina tomista.

Nada dice SANTO TOMÁS, por ejemplo, de la invención de nuevas verdades matemáticas, de una cierta feliz inspiración de que han gozado los más eminentes matemáticos, etc., etc.

Pero, si consideramos sólo el punto concreto que SANTO TOMÁS trató y lo comparamos con lo que dice Voss, hemos de confesar que tanto en el origen sensible de las primeras nociones como en su evolución intelectual ulterior es mucho más preciso SANTO TOMÁS.

Véase, en efecto, lo que dice Voss:

"Das erste Auftreten mathematischer Erkenntnisse können wir nur in Ahnungen finden, bei denen sich rein sinnliche Erfahrungen mit unbewussten Geistestätigkeiten verbinden. Schon in der frühesten Kulturzustände treten die beiden leitenden mathematischen Begriffsbildungen des Zählens und Messens in charakteristischer Weise bei den verschiedenen Völkern auf. Wenn wir davon überzeugt sind, dass alle Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, werden wir über diesen empirischen Ursprung der Mathematik nicht in der Zweifel sein. Aber angesichts der Schwierigkeit, ihren psychologischen Ursprung mit Sicherheit rationell, d. h. über blosse Vermutugen hinaus, zu erforschen, werden wir uns damit begnügen, zu konstatieren, dass der Verstand die Fähigkeit besitzt, die Beobachtung der sinnlich wahrnehmbaren Welt unter den bestimmten Formen der Ordnung und des Masses aufzufassen, und diese nun zum allgemeinen Schema der Beurteilung eines jeden einzelnen Falles zu machen, d. h. zu mathematischen Begriffen zu erheben".

Ueber die mathematische Erkenntnis. Leipzig, Teubner, 1914, p. 3.

[41] Véase, por ejemplo, FROEBES *Lehrbuch der experimentellen Psychologie,* Freiburg, Herder, 1923, Bd. I, p. 258-378 Die räumlichen Gesichtswarhnehmungen und Die Raumwahrnehmungen des Tastsinnes.

Bd. II, p. 139 Der Zahlenbegriff, que cita las diversas investigaciones de los psicólogos sobre este particular.

[42] A. VOSS *Ueber die mathematische Erkenntnis.* Die Kultur der Gegenwart: die mathematischen Wissenschaften 3, Leipzig, Teubner, 1914.

Aun lo que dice SANTO TOMÁS exige todavía muchos complementos para poderse presentar en nuestros tiempos como un análisis psicológico completo del origen de las primeras nociones matemáticas en general.

Falta, por ejemplo, precisar el influjo de la vista y del tacto en las percepciones espaciales.

Falta explicar adecuadamente el origen sensible del número.

Falta aclarar cómo de un fantasma imperfecto se llega a una idea tan exacta, etc. [43].

Otras lagunas se llenarán con el estudio particular de las nociones aritméticas y geométricas que haremos en los capítulos siguientes.

---

[43] Tal vez, ni siquiera se les ocurrió este problema a ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS; aunque hay un texto, que pudiera interpretarse en este sentido.

Dice así:

"Si etiam per sensum percipere possemus quod triangulus habet tres angulos aequales duobus rectis, adhuc oporteret quaerere demonstrationem ad habendum scientiam, neque per sensuum perceptionem perciperemus" (in An. Post. A 31, 87 b 32, l. 42, n. 7).

PROCLO, en cambio, vió claramente este problema. Dice (in *Euclidis Commentarius*, ed. *Friedlein*, p. 13,3): *πῶς δὲ τοῖς ἀκριβέσι καὶ ἀνελεγκτοῖς εἴδεσιν ἀπὸ τῶν μὴ ἀκριβῶν τὴν ἀκρίβειαν προσθήσομεν*;

Aun entre los modernos son pocos los matemáticos que advierten esta dificultad. Baste citar entre los que lo reconocen a KLEIN y POINCARE.

Dice el primero de estos autores (*Anwendung der Differential= und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Prinzipien*, Leipzig, Teubner, 1907, p. 7 sq.).

Para los sentidos externos:

"In allen diesen praktischen Gebieten gibt es einen Schwellenwert der Genauigkeit".

Para la imaginación:

"Ich glaube auch bein räumlichen Vorstellen an einen Schwellenwert".

Para el entendimiento:

"Im ideelen Gebiet der Aritmetik gibt es keinen endlichen Schwellenwert, wie im empirischen Gebiet, mit der die Zahlen definiert werden oder doch als definiert angesehen werden, ist umbegrenzt".

POINCARE, por su parte, dice: (*La valeur de la Science*, Paris, 1910 p. 22).

"Nous avons deux sortes d'intuitions: d'abord, l'appel aux sens et à l'imagination: ensuite la généralisation par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentals; nous avons enfin l'intuition du nombre pur...

Les deux premières ne peuvent nous donner la certitude, je l'ai montré plus haut par des exemples: mais qui doutera serieusement de la troisième, qui doutera de l'arithmétique?"

CAPITULO III

LAS PRIMERAS NOCIONES ARITMETICAS [1]

En el capítulo anterior he estudiado, de un modo general, el origen de las primeras ideas matemáticas. Ahora es necesario conocer la significación de estas nociones, para concretar más este análisis.

En este capítulo estudiaré las nociones aritméticas: en el siguiente las geométricas y en otro las relaciones entre ambas.

La primera noción aritmética, sagrada e intangible para los medievales, es la unidad.

ὁ ἀριθμετικός ...καὶ... τί ἐστι τὴν μονάδα ὑποτίθεται καὶ ὅτι ἔστιν (An. Post. B 9, 93 b 24). Pero el filósofo debe justificar estas nociones.

¿Qué es, pues, la unidad?

Πολλαχῶς λέγεται τὸ ἕν (Phys. A 2, 185 b 6), decía ARISTÓTE-

---

[1] Sobre este tema han escrito:

D. MERCIER.– *L'unité et le nombre d'après St. Thomas d'Aquin*, Rev. Neoscholast. 8 (1901) 258-275.

E. BODEWIG. *Zahl und Kontinuum in der Philosophie des hl. Thomas*, D. Thomas Frib. 13 (1935) 55-77.

Sólo sobre ARISTÓTELES puede verse J. STENZEL. *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Leipzig, Teubner, 1924.

LES [2] y SANTO TOMÁS añade que "forte potest dici quod ipsum unum est aequivocum" (in Phys. H 4, 248 b 19, l. 7, n. 9).

Por eso uno de los términos técnicos que explica ARISTÓTELES en el libro *Δ* de los Metafísicos es precisamente *τὸ ἕν* (6, 1015 b 16-1017 a 6). Y vuelve a ocuparse de la significación de la unidad al comenzar el libro I (I 1, 1052 a 15-1053 b 8).

Las varias significaciones que distingue en la unidad [3] se reducen [4]

[3] Véanse también:

Met. *Δ*	10,	1018 a 35	
Met. I	1,	1052 a 15	
Phys. E	2,	227 b 3	
De An. B	1,	412 b 8	

[4] He aquí la clasificación que hace ARISTÓTELES (páginas BEKKER) de *τὸ ἕν*, según el comentario de SANTO TOMÁS (números CATHALA entre paréntesis):

(1) *κατὰ συμβεβηκός*. 1015 b 17-35 (843-847) Excluidos 1052 a 14 (1921).

(a) "primo in terminis *singularibus* et hoc dupliciter:
(α) uno modo secundum quod accidens comparatur ad subjectum.
(β) alio modo secundum quod unum accidens comparatur cum alio" (843).

(b) "consequenter in terminis universalibus" (845).

(2) *καθ' ἑαυτά*.

(a) *τῷ συνεχῆ εἶναι*. 1015 b 36-1016 a 17 (849-858) = 1052 b 19-21 (1922-1924).
(b) *τῷ τὸ ὑποκείμενον τῷ εἴδει ἀδιάφορον*. 1016 a 18-23 (859-860).
(c) *ὧν τὸ γένος ἓν διαφέρον ταῖς ἀντικειμέναις διαφοραῖς*. 1016 a 24-32 (861-863).
(d) *ὅσων ὁ λόγος ὁ τὸ τί ἦν εἶναι λέγων ἀδιαίρετος πρὸς ἄλλον τὸν δηλοῦντα [τί ἦν εἶναι] τὸ πρᾶγμα*. 1016 a 32-36 (864).
(e) *ὧν ἡ νόησις ἀδιαίρετος ἡ νοοῦσα τὸ τί ἦν εἶναι*. 1016 b 1-3 (865).

"Reducit omnes modos ad unum" 1016 b 3-11 (866-869)
"Alius modus a supradictis" 1016 b 11-17 (870-871) = 1052 a 34-36 (1932)
"Ponit quamdam proprietatem consequentem unum" 1016 b 17-31 (872-875) = 1052 b 15-1053 b 8

Compárese este esquema con el que proponen:

H. BONITZ. *Aristotelis Metaphysica*, Bonnae, 1849, II, p. 234.

W. D. ROSS, *Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, II, p. 281.

a una fundamental: la indivisión [5].

A esta significación básica, sigue, según Santo Tomás, una propiedad [6], a saber, la unidad es la primera medida del número o la unidad es principio del número.

A primera vista parece que Aristóteles identifica aún más estos

---

En los Físicos propone Aristóteles una división más sencilla:

1) ἢ τὸ συνεχὲς (ut linea et corpus).

2) ἢ τὸ ἀδιαίρετον (ut punctum).

3) ἢ τὸ λόγος ὁ αὐτὸς καὶ εἷς ὁ τοῦ τί ἦν εἶναι, ὥσπερ μέθυ καὶ οἶνος.
Phys. A 2, 185 b 8-9.

Los ejemplos latinos son de Santo Tomás al explicar este paso (lección 3, n. 3).

[5] Es la expresión de Santo Tomás:

"Hic Philosophus reducit omnes modos (unius) ad unum primum..." (in Met. Δ 6, 1016 b 4-11; l. 8, n. 866).

"Deinde cum dicit 'dicitur quidem' (λέγεται μὲν). Reducit modos unius supra positos ad unam rationem" (in Met. I 1, 1052 a 34-b 1; l. 1, n. 1932).

• καθόλου γὰρ ὅσα μὴ ἔχει διαίρεσιν, ᾗ μὴ ἔχει ταύτῃ ἓν λέγεται.
Met. Δ 6, 1016 b 4 cf. l. 8, n. 866.

λέγεται μὲν οὖν τοσαυταχῶς, τό τε συνεχὲς φύσει καὶ τὸ ὅλον καὶ τὸ καθ' ἕκαστον καὶ τὸ καθόλου, πάντα δὲ ταῦτα ἓν τῷ ἀδιαίρετον εἶναι τῶν μὲν τὴν κίνησιν, τῶν δὲ τὴν νόησιν ἢ τὸν λόγον.
Met. I 1, 1052 a 34-b 1 cf. l. 1, n. 1932.

"Secundum quod aliquid se habet ad indivisionem ita se habet ad unitatem" (I Sent. d. 24, q. 1, a. 1 c.).

"Quod est simpliciter indivisum, dicitur simpliciter unum, quod est unum numero" (I Sent. d. 24, q. 1, a. 1, c.).

"Unum dicitur ex eo quod non dividitur" (I Sent. d. 24, q. 1, a. 3 c.).

"Haec est vera definitio unius: 'Unum est ens quod non dividitur' " (I Sent. d. 24, q. 1, a. 3 ad 3).

"Ratio unitatis ponit ens indivisum simpliciter" (I Sent. d. 24, q. 1, a. 4 ad 3).

"Ratio enim unitatis in impartibilitate consistit" (De div. nom. c. 1, l. 2).

"Unum non importat rationem perfectionis sed indivisionis tantum" (S. Th. I, q. 6, a. 3 ad 1).

"Unum nihil aliud significat quam ens indivisum" (S. Th. I, q. 11, a. 1 c.).

"Unum significat ens indivisum" (S. Th. I, q. 30, a. 3 c.).

[6] "Deinde cum dicit 'uni vero' (τὸ δὲ ἑνὶ) ponit quamdam proprietatem consequentem unum..." (In Met. Δ 6, 1016 b 18-30; l. 8, n. 872).

"Hic ex hac ratione unius (indivisibilitate) ostendit quamdam ejus proprietatem, scilicet esse mensuram..." (in Met. I 1, 1052 b 18-22; l. 2, n. 1937).

dos conceptos, porque los considera como constitutivos esenciales de la unidad.

a) τὸ δὲ ἑνὶ εἶναι ἀρχῇ τινί ἐστιν ἀριθμοῦ εἶναι (Met. Δ 6, 1016 b 18).

b) τὸ ἑνὶ εἶναι τὸ ἀδιαιρέτῳ ἐστιν εἶναι (Met. I 1,1052 b 16).

Pero, considerando atentamente el contexto, debemos reconocer que SANTO TOMÁS entendió bien la doctrina del Filósofo, porque:

a) en el primer caso, habla después de la indivisibilidad como lo común a todas las medidas y

b) en el segundo propone la medida como aplicación principal de la indivisibilidad.

La unidad, pues, fundamentalmente, es algo indivisible. Por ser tal sirve para medir, mide principalmente el número, es principio del número.

Notemos cómo acentúa SANTO TOMÁS esta nota básica de la unidad.

"Quaedam —dice— sunt omnino indivisibilia, sicut unitas quae est principium numeri" (in Met. I 1, 1053 a 23, l. 2, n. 1953).

"Aliquid vero est quod nihil aliud importat, sed est ipsa sua indivisibilitas, ut unitas quae est principium numeri; et tamen inhaeret alicui quod non est ipsamet unitas, scilicet subjecto suo" (I Sent. d. 24, q. 1, a. 1 c.).

Esta rigurosa interpretación de la indivisibilidad en la unidad explica que para los antiguos el concepto de mitad sólo se salvase aplicándolo al dos [7], que no tuviesen números fraccionarios [7 b], etc., etc.

Pero, al explicar en qué consiste esta indivisibilidad, da una explicación que cualquier matemático moderno admitiría:

"Unum quod est principium numeri, est omnino indivisibile, nullamque additionem aut substractionem recipiens *manet unum*" (In Met. I 1, 1053 a 1, l. 2, n. 1945).

Y en otra parte llega incluso a admitir el carácter relativo de la unidad que se aplica principalmente en los sistemas de numeración, fundados en una serie de unidades relativas.

---

[7] Véase in Phys. Γ 3, 202 a 19, l. 4, n. 11.

[7 b] Véase H. SCHOLTZ *Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut*, Kantstudien 33 (1928) 65-68.

"Nec unum est privatio illius multitudinis quam constituit, sed multitudinis quae negatur esse in ipso quod dicitur unum. Non enim de ratione sua unum privat omnem divisionem; sed sufficit ad rationem ejus quaecumque [8] divisio removeatur. Et inde potest esse quod unum est pars multitudinis, et quod ipsa multitudo dicitur quodammodo unum, prout scilicet aliquid non dividitur, ad minus secundum intellectum aggregantem" (I Sent. d. 24, q. 1, a. 3 ad 4) [9].

En los textos citados ocurre una expresión técnica que es preciso analizar detenidamente.

Habla en ellos Santo Tomás del
"unum quod est principium numeri"
que aparece siempre opuesto al
"unum quod convertitur cum ente" [10].

Para evitar los errores en que incurrieron Pitágoras, Platón y Avicena es preciso distinguir bien estas dos nociones de uno [11].

---

[8] Interpretando *quaecumque* en el sentido ordinario, este texto es ininteligible.

No debe tratarse de un error de copista, pues el Cod. Vat. Lat. 753 (f. 35 b 39) pone claramente la abreviatura de quaecumque.

Débese, pues, entender quaecumque "latiore sensu" como qualiscunque, según nota Forcellini *Totius Latinitatis Lexicon s. h. v.*

[9] En un lugar de la Suma dice claramente:

"Multitudo est quoddam unum" (S. Th. I q. 11, a. 2 ad 1).

[10] Véanse:

in Met.	B 5,	1001 b 25; l. 12, n. 501
	Γ 2,	1003 b 32; l. 2, n. 557
	Δ 6,	1016 b 32; l. 8, n. 875
	I 2,	1054 a 15; l. 3, n. 1981
I Sent.	d. 24, q. 1, a. 1 ad 1.	
	a. 3 ad 4.	
De Pot.	q. 3, a. 16 ad 3.	
	q. 9, a. 7 ad 2.	
S. Th.	I q. 11, a. 1 ad 1.	
	a. 2 c	
	a. 3 ad 2.	
	q. 30, a. 3 c	

[11] Sobre los Pitagóricos y Platónicos:

in An. Post.	A 28,87 a 40; l. 41, n. 4	
	B 4,91 a 39; l. 3, n. 11	

El uno es siempre fundamentalmente algo indivisible. Por tanto, si hay varias maneras de división, habrá también varios tipos de unidad [12].

Ahora bien SANTO TOMÁS distingue dos clases de división:

División formal que no sigue la cantidad.
y División material que sigue la cantidad [13].

Consiguientemente, distingue también:

dos clases de uno:

Uno que no supone la cantidad —"quod convertitur cum ente"— trascendental.

Uno que supone la cantidad —"quod est principium numeri"— predicamental [14].

---

in Met. A 6,987 b 22; l. 10, n. 159-160
Δ 8,1017 b 17; l. 10, n. 901

Sobre los Platónicos solamente:
in Met. B 5,1001 b 25; l. 12, n. 501

Sobre AVICENA:
in Met. Γ 2,1003 b 32; l. 2, n. 557
I 22,1054 a 15; l. 3, n. 1981

Véanse sobre todo:
De Pot. q. 9, a. 7 c.
S. Th. I q. 11, a. 1 ad 1.

[12] "Cum divisio multitudinem causet, indivisio vero unitatem, oportet secundum rationem divisionis, de uno et multo judicium sumi" (De Pot. q. 9, a. 7 c.).

[13] "Est autem duplex divisio:
una materialis, quae fit secundum divisionem continui...
alia est divisio formalis, quae fit per oppositas vel diversas formas..." (S. Th. I q. 30, a. 3 c.).

Cf. De Pot. q. 9, a. 7, c.
in Met. Γ 2, 1004 a 19; l. 3, n. 566.

En la S. Th. I q. 47, a. 2 c. habla también de esta división, pero no a este propósito.

[14] "Unum secundum quod est principium numeri, non praedicatur de Deo; sed solum de his quae habent esse in materia...
Unum vero quod convertitur cum ente est quoddam metaphysicum, quod secundum esse non dependet a materia" (S. Th. I q. 11, a. 3 ad 2).

y dos clases de multitud:

Multitud que no supone la cantidad —multitud trascendental
Multitud que supone la cantidad —multitud predicamental [15].

Una vez esto supuesto es manifiesta la distinción entre los dos conceptos de unidad [16].

Es claro que el concepto de uno predicamental añade algo real al concepto de ser —el concepto de cantidad—, mientras que el concepto de uno trascendental añade sólo una negación [17].

Pero esta distinción no es equívoca. Desde luego la unidad predicamental incluye la trascendental. Pero, además, la característica de la unidad predicamental —el servir como medida—, que, primariamente se encuentra en la cantidad discreta [18], se aplica también por cierta semejanza a las otras categorías [19].

---

[15] in Phys. Γ 5, 204 b 7; l. 8, n. 4.
in Met. I 6, 1057 a 1; l. 8, n. 2090.
I Sent. d. 24, q. 1 a. 3 c. et ad 5.
De Pot. q. 9, a. 7, c.
S. Th. I q. 30, a. 3 c. et ad 2.

[16] Todos los argumentos con que SANTO TOMÁS prueba la distinción de ambos conceptos suponen siempre esta nota.
in Met. Γ 2, 1003 b 32; l. 2, n. 557-559.
I 2, 1054 a 15; l. 3, n. 1981.

[17] "Unum quod convertitur cum ente, non addit aliquam rem supra ens: sed unum quod est principium numeri, addit aliquid supra ens, ad genus quantitatis pertinens" (S. Th. I q. 11, n. 1 ad 1).

Cf. in Met. B 5, 1001 b 25; l. 12, n. 501.
Γ 2, 1003 b 32; l. 2, n. 560.
I 2, 1054 a 13; l. 3, n. 1974.
I 6, 1057 a 1; l. 8, n. 2090.
De Pot. q. 3, a. 16, ad 3.
q. 9, a. 7 c.
S. Th. I q. 11, a. 1 c.
q. 30, a. 3 c.

[18] "Ostendit quod ratio mensurae primo invenitur in discreta quantitate, quae est numerus; dicens quod id quo primus cognoscitur quantitas est 'ipsum unum', idest unitas, quae est principium numeri. Nam unum in aliis speciebus quantitatis non est ipsum unum, sed aliquid cui accidit unum; sicut dicimus unam manum, aut unam magnitudinem" (in Met. I 1, 1052 b 23; l. 2, n. 1939).

[19] "Sciendum est quod esse mensuram est propria ratio unius secundum quod est principium numeri. Hoc autem non est idem cum uno quod convertitur cum ente, ut in quarto dictum est. Ratio enim illius unius in sola indivisione consistit: hujusmodi autem in mensuratione. Sed tamen haec ratio mensurae,

Dejando la unidad trascendental, podemos resumir el pensamiento de SANTO TOMÁS diciendo que la unidad predicamental —unidad aritmética— es lo indivisible de la cantidad discreta [20].

Así lo cree [21] el aritmético y lo sabe el metafísico.

Pero el aritmético cree además la existencia de la unidad. ¿Qué dicen los filósofos?

Ciertamente, ni ARISTÓTELES, ni SANTO TOMÁS admiten la existencia de un "UNO" separado, como lo concebía PLATÓN, porque sería un absurdo en su filosofía [22].

Existen sólo seres —materiales o inmateriales— que son "unos". La unidad trascendental es una propiedad de todos los seres. La unidad predicamental es una propiedad de todos los seres extensos.

"Unidad" —nombre abstracto— y "uno" —adjetivo— son sólo conceptos de nuestra mente abstraídos ciertamente de la realidad.

Más adelante estudiaré si estas nociones son ya seres matemáticos o si hay que pedir más condiciones para la existencia matemática.

---

licet primo conveniat uni quod est principium numeri, tamen per quamdam similitudinem derivatur ad unum in aliis generalibus, ut in decimo huius Philosophus ostendet. Et secundum hoc ratio mensurae invenitur in quolibet genere. Haec autem ratio mensurae consequitur rationem indivisionis, sicut habitum est. Et ideo unum non omnino aequivoce dicitur de eo quod convertitur cum ente, et de eo quod est principium numeri; sed secundum prius et posterius" (in Met. Δ 6, 1016 b 32; l. 8, n. 875).

[20] En el op. 48 *De totius Logicae Aristotelis Summa*, (tr. III, c. 1) se encuentran estas dos definiciones del "unum quod est principium numeri".

"Ens indivisum quantitatis continuae".

"Continuum indivisum".

Ciertamente se pueden entender bien estas definiciones, pero no creo que expresen la idea de SANTO TOMÁS. Supuesta la cantidad discreta, es más justo decir que la unidad es lo indivisible de esta cantidad.

Por otra parte, como es sabido, este opúsculo no es de SANTO TOMÁS. Cf. K. PRANTL, *Geschichte der Logik*, Leipzig, 1927, Bd. III, S. 108, An. 484.

I. WILD, *Ueber die Echtheit einiger Opuscula des hl. Thomas*, Jahrb. f. Phil. u. spek. Theol. 21 (1907) 69-71.

P. MANDONNET, *Des écrits authentiques de Saint Thomas*, Fribourg, 1910, p. 149.

[21] Es la expresión que usa SANTO TOMÁS para indicar la jerarquía de las ciencias: "musica credit principia tradita sibi ab arithmetico" (S. Th. I q. 1, a. 2 c.). (Cf. in An. Post. A 13, 78 b 34; l. 25).

[22] Ampliamente refuta esta posición ARISTÓTELES, en seguida del Capítulo en que habla de la unidad como medida. Met. I. 2, 1053 b 16-1054 a 13 (l. 3, n. 1963-1973).

Aquí sólo completaré, según lo permiten los textos de Santo Tomás, el análisis del origen psicológico de la unidad.

El proceso lógico del conocimiento intelectual de la unidad nos lo describe muy claramente Santo Tomás; pero sobre el conocimiento sensible se expresa muy vagamente.

Véase lo preciso del proceso intelectual:

"*Primum* enim quod in intellectum cadit est ens; *secundum* vero est negatio entis; ex his autem duobus sequitur *tertio* intellectus divisionis.

(ex hoc enim quod aliquid intelligitur ens et intelligitur non esse hoc ens, sequitur in intellectu quod sit divisum ab eo);

quarto autem sequitur in intellectu ratio unius, prout scilicet intelligitur hoc ens non esse in se divisum; *quinto* autem sequitur intellectus multitudinis, prout scilicet hoc ens intelligitur divisum ab alio et utrumque ipsorum esse unum in se" (De Pot. q. 9, a. 7, ad 15) [23].

Aquí no distingue entre uno trascendental y uno predicamental. Creo que primero tenemos, sin distinguirla, la noción de unidad predicamental, porque primero tenemos idea del ser material. Luego, cuando llegamos a tener la idea de un ser inmaterial, según el mismo procedimiento, tendremos la idea de unidad trascendental, pero sin distinguirla. Sólo la comparación reflexiva entre los dos tipos de ser y las dos unidades nos hacen percibir su distinción.

En cambio, sobre el conocimiento sensible, solamente dice, siguiendo a Aristóteles [24] que los sentidos perciben primero la multitud y luego la unidad [25].

---

[23] Más resumida presenta esta misma doctrina en la S. Th. I q. 11, a. 2, ad 4. Cf. I Sent. d. 24, q. 1, a. 3 ad 2.

[24] "Intellectus noster accipit a sensu; et ideo ea cadunt prius in apprehensionem intellectus nostri, quae sunt sensibilia; et hujusmodi sunt magnitudinem habentia, unde punctus et unitas non definiuntur nisi negative" (in De An. *Γ* 6, 430 b 24; l. 11, n. 758).

[25] Una de las veces que habla Aristóteles de los *αἰσθητῶν κοινῶν* (De An. *Γ* 1, 425 a 15), pone también entre ellos *τὸ ἕν* y explica el modo de percibirlo sensiblemente.

El Cod. Vat. Gr. 266 omite *ἑνὸς* en este lugar y según me indicó el P. Siwek son varios los códices que omiten esta palabra.

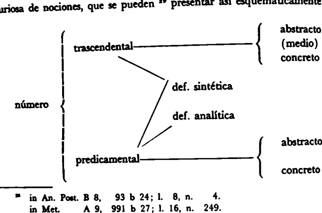
Santo Tomás (l. 1, n. 577) no lo pone tampoco.

Pero el objeto de la aritmética es el número [26]. Por tanto el aritmético supone también la significación y la existencia del número [27]. El filósofo debe justificar estas suposiciones [28].

¿Qué es, pues, el número?

Todos conocen aquella definición: "Multitudo mensurata per unum".

Pero estudiando los textos del SANTO se encuentra una variedad curiosa de nociones, que se pueden [29] presentar así esquemáticamente:



[26] in An. Post. B 8, 93 b 24; l. 8, n. 4.
in Met. A 9, 991 b 27; l. 16, n. 249.
Γ 2, 1003 b 32; l. 2, n. 560.
E 1, 1025 b 8; l. 1, n. 1147.

[27] in An. Post. A 1, 71 a 13; l. 2, n. 6.

[28] Véanse los textos citados en el capítulo primero (nota 5).

[29] JUAN DE SANTO TOMÁS (Lógica, P. II, q. 16, a. 2, ed. *Reiser*, vol. I, p. 552 a 1-26), propone claramente esta división:

número { abstracto / (medio) / concreto } { predicamental / trascendental }

Y luego dice (p. 555 a 45) que el objeto de la aritmética es el número predicamental. Muchos Escolásticos repiten sin más estas afirmaciones.

Pero este es un error inexplicable. O no sabían aritmética o no eran lógicos con sus divisiones, porque es claro que las aritméticas, sobre todo las de tipo pitagórico —como las de NICÓMACO y BOECIO— estudian las propiedades del número como tal y no del número aplicado a las cosas.

SANTO TOMÁS ocasionó tal vez esta confusión, al hablar del número (que llama medio entre el "numerus simpliciter" y el "numerus qui est in ratione tantum") de las Personas de la Santísima Trinidad.

Santo Tomás indica la primera división con muy distintas palabras [30]. Los modernos suelen llamar las dos clases: número trascendental y predicamental [31].

Conviene observar desde luego esta coincidencia. Con las dos clases de número usa también Santo Tomás dos definiciones.

Clases	a) multitudo transcendens	(número trascendental)
	b) multitudo numeralis	(número predicamental)
Definiciones	a) multitudo mensurabilis per unum	(definición analítica)
	b) aggregatio unitatum	(definición sintética)

Parecería natural que la correspondencia entre las clases y definiciones fuese biunívoca, pero no es así.

El número trascendental admite sólo la definición sintética; el predicamental las dos. Y viceversa, la definición analítica corresponde solamente al número predicamental y la sintética a los dos.

Considerando, pues, la definición sintética y recordando las dos clases de unidad, aparece clara la diferencia de los dos números.

Si se agregan unidades predicamentales, resulta el n. predicamental.

Si se agregan unidades trascendentales, resulta el n. trascendental.

Pero esta división del número no es equívoca, sino análoga, como la división de la unidad qne es su fundamento.

La diferencia entre número trascendental y número predicamental

---

[30] He aquí las diversas denominaciones:

1)	Multitudo quae est numerus	multitudo quae dividit ens	I Sent. d. 24 q1 a3 c.
2)	Multitudo numeralis	multitudo	ib. ad 5
3)	Multitudo numeralis	multitudo simpliciter	De Pot. q9 a 7 c
4)	M. consequens div. sec. quant.	m. consequens div. formarum	Phys. 3 l. 8, n. 4
5)	numerus	multitudo	Met. 1061; 8,
6)	numerus	multitudo	n. 2090
7)	M. species quantitatis	multitudo transcendens	S. Th. I q. 30
8)	Numerus causatus ex divisione continui	(numerus) causatus ex distinctione formarum	S. Th. 2 q. 50 a 3 1

[31] Véanse por ejemplo:

J. Gredt, *Elementa Philosophiae Aristotelico-Thomisticae*, Freiburg, Herder, 1932, vol. I, n. 184.

P. Hoenen, *Cosmologia*, Romae, P. U. Greg., 1936, p. 426.

no consiste en que esté o no determinado, como vulgarmente suele creerse [32].

El estar o no determinado sirve sólo para distinguir la multitud ("quasi-genus") [33] del número ("quasi-species") [34].

La diferencia entre los dos tipos de número es más profunda. Es que el número predicamental se origina por la división de la cantidad a la que primariamente conviene el ser medida; en cambio el número trascendental se funda en la distinción de las formas, a las cuales sólo por semejanza se aplica la medida.

Luego SANTO TOMÁS, siguiendo a ARISTÓTELES, introduce otra distinción que es fundamental para el aritmético. Como ARISTÓTELES, la introduce al definir el tiempo.

ἀριθμός ἐστι διχῶς (καὶ γὰρ τὸ ἀριθμούμενον καὶ τὸ ἀριθμετόν ἀριθμὸν λέγομεν, καὶ ᾧ ἀριθμοῦμεν). (Phys. *Δ* 11, 219 b 16).

"*Numerus dicitur dupliciter:*

Uno modo id quod numeratur actu, vel quod est numerabile, ut puta cum dicimus decem homines aut decem equos; qui dicitur numerus *numeratus*, quia est numerus applicatus rebus numeratis.

Alio modo dicitur numerus quo numeramus, idest ipse numerus absolute acceptus, ut duo, tria, quatuor" (in Phys. I, c., l. 17, n. 11).

---

[32] Sin duda ha dado ocasión a esta creencia la mala traducción latina de la definición aristotélica: *ἀριθμὸς πλῆθος ἑνὶ μετρετόν* (Met. I 6, 1057 a 3).

SANTO TOMÁS analizando este texto dice: "multitudo *mensurabilis* uno" (l. 8, n. 2090); pero en otros lugares dice frecuentemente "multitudo *mensurata*"; por ejemplo, in Phys. *Γ* 5; 204 b 8; l. 8, n. 4.

[33] Véase in Met. I 6, 1056 b 30, l. 8, n. 2090.

[34] Así, por ejemplo, el cardenal MERCIER (*L'unité et le nombre d'après Saint Thomas*, Rev. Neoschol 8 (1901) 264 dice:

"La multitude nous dit qu'il y a des unités distinctes réunis en un seul concept. Le nombre nous dit combien il y en a.

Le passant voit une multitude de moutons dispersées dans une prairie. Le berger connaît le nombre de ses moutons".

Usa diversas denominaciones para estas dos clases de número [35].

Al último lo llama también "abstractus extra numeratum", "simplex vel absolutus", "simpliciter prolatus", "numerus unitatum".

Al primero "in numerato exsistens", "qui est in rebus numeratis", "in sensibilibus exsistens", "numerus rerum".

En términos modernos, diríamos número abstracto o concreto. O más técnicamente distinguiríamos la serie de números naturales y los diversos conjuntos numerables.

Entre estas dos clases de número coloca SANTO TOMÁS el número misterioso de la Trinidad de Personas en Dios, según el augusto misterio de nuestra santa Fe.

"Numerus divinarum Personarum est medius inter numerum qui est numerus simpliciter [36] et numerum qui est in ratione tantum, sicut punctus dicitur multiplex secundum rationem tantum. Est enim minus de ratione numeri in numero Personarum quam in numero simpliciter,

---

[35] Véanse los lugares en que ocurre esta distinción y las distintas locuciones que usa:

1) Abstractus extra numeratum	in numerato exsistens	S. Th. q. 10 a 6 c
2) Simplex vel absolutus	qui est in rebus numeratis	q. 30 al 4 a 2 5
3) Simplex	rerum	De Pot. q. 9 a 5 6
4) Absolutus quo numeramus	qui est in rebus	Phys. 3 l. 6, n. 6
5) Separatus a sensibilibus		
6) Separatus	in sensibilibus exsistens	l. 8, n. 3
7) quo numeramus	numeratus	4 Phys. l. 17, n. 11
8) absolute acceptus	applicatus rebus numeratis	ib.
9) simpliciter	numeratus	Phys. l. 19, n. 4
10) simpliciter prolatus		Met. 5, l. 16 n. 992
11) unitatum	rerum	8, l. 3 n. 1724
12) simplex et absolutus	applicatus ad res	De instantibus
13) absolute	applicatus rebus	I sent. d24 ql. a 2 c.
14) qui est in ratione tantum	simpliciter	ib.

[36] En la nota anterior se habrá notado el equívoco de "numerus simpliciter" de este lugar comparado con todas las otras denominaciones.

En fuerza del contexto y comparado con dos lugares de la Suma (I q. 30, a. 1 ad 4; a. 2 ad 5), es necesario entender aquí "numerus simpliciter" como "numerus applicatus rebus".

Esta misma interpretación exige este otro paso del mismo comentario que remite al nuestro:

"Ubi est numerus simpliciter ibi est divisio vel per essentiam vel per quantitatem. Sed talis numerus non est in divinis, sed numerus quidam, ut dictum est; et ad istum numerum sufficit distinctio relationum" (I Sent. d. 24, q. 2, a. 1, ad 2).

et plus quam in numero qui est secundum rationem tantum" [37]. (I Sent. d. 24, q. 1, a. 2 c.).

Conviene subrayar una de las denominaciones que usa SANTO TOMÁS. "Numerus abstractus extra numerum" y "Numerus in numerato exsistens", es decir: el número concreto existe (de alguna manera) en las cosas, pero el número abstracto existe sólo en el entendimiento [38].

Conviene también notar un texto que indica el valor aritmético de la división entre números abstractos y concretos.

"Septem equi et septem canes non differunt secundum numerum, sed differunt secundum speciem rerum numeratarum" (in Phys. Δ 14, 223 b 5, l. 23, n. 9).

Rigurosamente este texto se debe interpretar así: Desde el punto de vista del aritmético [39], son perfectamente equivalentes siete caballos y siete perros; o, con otras palabras, el aritmético estudia el número abstracto y no el concreto.

E l n ú m e r o c o n c r e t o sirve al aritmético como punto de partida. Para conocerlo se requiere una operación del entendimiento, que consiste en ir comparándolo con la unidad que es su medida [40]. Si se trata, por ejemplo, de contar los caballos de un ejército, la medida es un caballo; si un camino, la milla o el kilómetro, etc., [41].

---

[37] Solamente por curiosidad noto aquí este otro sentido de número que se encuentra en SANTO TOMÁS, interpretando a SAN AGUSTÍN:

"Numerus qui est causa omnis rei, scilicet ipse Deus, qui secundum AUGUSTINUM est numerus omni rei speciem praebens" (in Boet. de Trin. q. 4, a. 1 ad 1).

[38] "Non enim numerus absolutus a rebus numeratis est nisi in intellectu" (S. Th. I q. 30, a. 1 ad 4).

"Numerus simplex, qui est tantum in acceptione intellectus..." (S. Th. I q. 30, a 2 ad 5).

[39] "Arithmetica non determinat de numero inquantum est ens, sed inquantum est numerus" (in Met. E 1, 1025 b 3, l. 1, n. 1147).

[40] "Numeratio fit per collationem numeratorum ad unam primam mensuram, conferre autem rationis est" (in Phys. Δ 14, 223 a 25, l. 23, n. 4).

[41] "Cognoscimus enim numero equorum multitudinem, et iterum uno equo cognoscimus numerum equorum. Non enim sciremus quot sunt milliaria, nisi sciremus quid est milliare" (in Phys. Δ 12, 220 b 20, l. 19, n. 6).

Luego por una abstracción de nuestro entendimiento llegamos a l n ú m e r o a b s t r a c t o que es un concepto unívoco [42], que se divide en especies: dos, tres, cuatro, etc. [43]. Cada unidad aumentada o disminuida, hace mudar la especie [44]. Por tanto no hay continuidad entre las especies de números [45], sino que van saltando de unidad en unidad. Esta distancia es la misma realmente, dice SANTO TOMÁS, creciendo y decreciendo, pero se diferencia racionalmente. La distancia de dos a uno se llama duplo, la de uno a dos mitad [46].

Otras cosas más dice del número que no nos interesan; por ejemplo, del número superfluo, perfecto, etc., [47].

Sólo quiero notar para terminar la exposición del número en SANTO TOMÁS la unidad intrínseca que exige al número. Léase este texto interesante:

"Dualitas non erunt duae unitates, sed aliquid ex duabus unitatibus compositum. Aliter enim numerus non esset unum per se et vere, sed per accidens, sicut quae coacervantur" (in Met. Z 13, 1039 a 13, l. 13, n. 1589).

---

[42] "Sed dicendum quod unum dividentium aliquid commune potest esse prius altero *dupliciter*:

uno modo, secundum proprias rationes, aut naturas dividentium;

alio modo, secundum participationem rationis illius communis quod in ea dividitur.

Primum autem non tollit univocationem generis, ut manifestum est in numeris, in quibus binarius secundum propriam rationem naturaliter est prior ternario; sed tamen aequaliter participant rationem generis sui, scilicet numeri: ita enim est ternarius multitudo mensurata per unum; sicut et binarius.

Sed secundum impedit univocationem..." (in De Int. 5, 17 a 8, l. 8, n. 6).

[43] En otro sentido distingue varias especies de números que no hacen a nuestro propósito, por ejemplo, compositus et incompositus, quadratus et cubicus, determinatus et indeterminatus, multiplex, superparticularis, superpatiens, etc.

Vea quien tenga interés L. SCHUETZ, *Thomas=Lexicon*, Paderborn, Schoning, 1895, en la palabra numerus.

[44] "Quaelibet enim unitas addita vel substracta, variat speciem numeri" (in Met. Δ 27, 1024 a 14, l. 21, n. 1113).

[45] "Inter species numerorum non est continuitas" (in Phys. E 2, 225 b 10, l. 3, n. 5).

[46] "Eadem enim distantia est unius ad duo et duorum ad unum secundum rem sed differunt secundum rationem; quia secundum quod incipimus comparationem a duobus procedendo ad unum, dicitur duplum, e contrario vero dicitur dimidium" (in Phys. Γ 3, 202 a 19, l. 4, n. 11).

[47] Véase la nota 43.

Si, según SANTO TOMÁS, el objeto de la aritmética es el número abstracto, nos encontramos con la misma dificultad que hemos dejado suspensa con respecto a la unidad: ¿Se confunde la existencia intencional en el entendimiento —única existencia del número abstracto— con la existencia matemática?

Esta cuestión en toda su amplitud será objeto de un capítulo especial. Ahora debería completar el análisis psicológico del origen del número, pero como ya indiqué en el capítulo anterior son insuficientes las indicaciones que hace SANTO TOMÁS a este propósito.

En la aritmética de BOECIO hay un capítulo titulado *De principalitate unitatis* [48]. En las aritméticas modernas de tipo logístico la unidad ha perdido hasta el privilegio de ser el principio de la serie natural, pues para mejor generalidad consideran el cero como origen de la serie. Los dos únicos oficios que ocupa en tales aritméticas son: ser razón de la serie natural y ser módulo de la multiplicación.

Las aritméticas de tipo intuicionista son más conservadoras; pero en todas las aritméticas modernas ha perdido la unidad ese carácter sagrado de la indivisibilidad absoluta, dando lugar su división a los números *reales*.

Ciertamente SANTO TOMÁS no conoció ni de lejos la posibilidad de estos *números*, pero el objeto que señaló a la aritmética —el número predicamental abstracto, que se origina por la división del continuo— sirve muy bien de fundamento para la introducción de estos nuevos seres matemáticos.

---

[48] P. L. 65, 1087.

CAPITULO IV

LAS PRIMERAS NOCIONES GEOMETRICAS *

En este capítulo estudiaré las nociones geométricas, como estudié en el anterior las aritméticas.

"In Geometria intenditur quasi finis cognitio magnitudinis, quae est subjectum Geometriae", dice SANTO TOMÁS (in An. Post. A 28, 87 a 38, l. 41, n. 7).

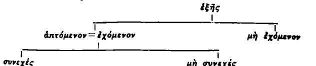
El objeto, pues, de la Geometría es el extenso [1], o, más exactamente, el continuo [2].

---

* Véase la segunda parte del artículo citado de E. BODEWIG *Zahl und Kontinuum in der Philosophie des heiligen Thomas*, Div. Thom. Frib. 13 (1935) 187-207.

[1] Véanse los textos citados en el cap. III, n. 26.

[2] Conocidos son los tres géneros de extenso que distingue ARISTÓTELES. W. D. ROSS (*Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, II, p. 345), los propone como en un árbol porfiriano de esta forma:



SANTO TOMÁS en el Comentario a los Físicos (in Phys. E 3, 226 b 18 sq. l. 5) no distingue claramente estos tres géneros; pero en su Comentario a los metafísicos aparece clara esta distinción.

Claramente propone también esta división SILVESTER MAURUS.
in Arist. Phys. V, 4, n. 9 (ed. EHRLE, t. III, p. 140, s.)
Met. XI, 13, n. 8 (ed. EHRLE, t. IV, p. 540, b)

Véase P. HOENEN *Cosmologia*, Romae, P. U. Greg., 1936, p. 7 sq.

Santo Tomás explica de una manera general la significación de continuo por la etimología:

"Continuum a continendo dicitur: quando igitur multae partes continentur in uno, et quasi simul se tenent, tunc est continuum" (in Phys. E 3, 227 a 10, l. 5, n. 8).

Pero esta noción, básica de la Geometría, exige un análisis más detenido. Aristóteles, que se preocupa del continuo en varios lugares de sus obras [3], da tres [4] definiciones:

I *συνεχὲς λέγεται οὗ κίνησις μία καθ' αὑτό.* Met. Δ 6, 1016 a 15.

II *τὸ συνεχὲς εἰς ἄπειρον διαιρετόν.* Phys. A 2, 185 b 10.

III *συνεχῆ ὧν τὰ ἔσχατα ἕν.* Phys. Z 1, 231 a 22.

De la primera dice Santo Tomás que sirve para distinguir los diversos grados de unidad en los continuos [5], pero no tiene aplicación estricta al continuo matemático.

La segunda, que Santo Tomás llama material [6], será estudiada detenidamente en el capítulo dedicado al infinito.

La tercera es la definición formal [7]. Es la que usa Aristóteles para distinguir el continuo de los otros géneros de extenso.

συνεχῆ μὲν ὧν τὰ ἔσχατα ἕν.
ἁπτόμενα δὲ ὧν ἅμα.
ἐφεξῆς δ' ὧν μηδὲν μεταξὺ συγγενές. Phys. Z. 1, 231 a 22 [8].

---

[3] Basta ver H. Bonitz *Index Aristotelicus*, 728 a 15 - b 20.

[4] "Continuum invenitur a Philosopho *dupliciter* definitum" dice simplemente Santo Tomás en el de Caelo et Mundo (A I, 268 a 6, l. 2, n. 2), pero él mismo comenta una tercera definición que Aristóteles propone en los Metafísicos (Δ 6, 1016 a 15, l. 7, nn. 849-855) y alude también a ella in De Cael. A 9, 278 b 11, l. 20, n. 2.

[5] "Ex ista definitione potest sumi diversus gradus unitatis in diversis continuis" (in Met. Δ 6, 1016 a 15, l. 7, n. 854).

[6] "Alio modo (definitur Continuum) definitione materiali quae sumitur ex partibus quae habent rationem materiae, ut dicitur in II Physicorum (B 3, 195 a 16, l. 5, n. 8-9) et sic definitur hic quod continuum est quod est divisibile in semper divisibilia" (in De Cael. A 1, 268 a 6, l. 2, n. 2).

[7] Continuum definitur "uno modo definitione formali, prout dicitur in praedicamentis (Cat. 6, 5 a 1) quod continuum est cujus partes copulantur ad unum communem terminum: unitas enim continui est quasi forma ipsius" (in De Cael. A 1, 268 a 6, l. 2, n. 2).

[8] Véanse también:

Cat.	6,	5 a 1
Phys. E	3,	227 a 10, 21
	4,	228 a 29

Santo Tomás, comentando otro pasaje del Filósofo, explica claramente la gradación de estas definiciones.

"Inter ista tria, consequenter, contactum et continuum, prius et communius est quod est consequenter.

Non enim omne quod est consequenter tangit, sed omne quod tangit est consequenter. Oportet enim contacta secundum positionem esse ordinata, et nihil eorum esse medium.

Et similiter tangens est prius et communius ens quod continuum; quia si est continuum, est necesse quod tangat.

Quod enim est unum, necesse est esse simul; nisi forte intelligatur in hoc quod est esse simul pluralitas. Sic enim continuum non esset contactum. Sed eo modo quo id quod est unum est simul, necesse est continuum esse tangens.

Sed non sequitur, si tangit quod sit continuum, sicut non sequitur si aliqua sunt simul, quod sint unum" (in Met. K 12, 1069 a 10, l. 13, n. 2414) •.

Se distinguen, pues, tres notas:

1) La *extensión,* común a los tres géneros.
2) *La carencia de interrupción,* común al contiguo y al continuo.
3) *La unidad intrínseca,* propria del continuo.

Como las notas primera y tercera incluyen generalmente [10] la segunda, podemos describir sólo con ellas el continuo.

Continuo, pues, es el "extenso intrínsecamente uno".

Phys. E 6, 259 a 16, 19
Met. K. 12, 1069 a 5, 10

H. Bonitz en su *Index Aristotelicus* cita también, *De lineis insecabilibus,* 971 b 29.

Santo Tomás dice a propósito de este libro:
"Invenitur autem quidam alius libellus, in quo probatur quod non sunt lineae indivisibiles; quem quidam dicunt esse Theophrasti" (in De Cael. *Γ* 1, 299 a 6, l. 3, n. 3).

Ueberweg (*Grundriss der Geschichte der Philosophie,* I. ed. Praecter, Berlin, 1926, p. 369) dice:
"Gegen die Echtheit der Schriften *περὶ ἀτόμων γραμμῶν* sprechen überwiegende Gründe".

• Véase la nota (2).

[10] Digo "generalmente" por no querer dilucidar la cuestión de la posibilidad de un ser intrinsecamente uno, cuyas partes fuesen discretas, que propone P. Hoenen *Cosmologia,* Romae, P. U. Greg., 1936, p. 11.

De la unión de estas dos notas surgen en seguida diversos problemas: Si el continuo es extenso, parece que deben existir sus partes.

Si es uno intrínsecamente, parece que no deben existir sus partes.

Pero este problema no se puede resolver hasta haber tratado de la existencia matemática.

Otro problema interesantísimo, que ofrece el continuo por ser siempre divisible, será objeto de un capítulo especial.

Aquí sólo intento constatar cómo se cumple esta definición general de continuo en los objetos de la Geometría y justificar de alguna manera su existencia.

Santo Tomás, siguiendo a los matemáticos de su tiempo, distingue claramente tres especies de continuos en la Geometría [11], las tres dimensiones longitud, latitud y profundidad [12] que son como la medida interna de las cosas [13] y afirma resueltamente que no hay más que tres dimensiones [14].

Uno de los problemas filosóficos, más interesantes que ofrece la Geometría es esta trinidad dimensional.

Santo Tomás no conoció este problema. Para él era cosa cierta, demostrada matemáticamente, que sólo hay tres dimensiones.

"Probare demonstrative esse solum tres dimensiones, pertinet ad mathematicum: sicut Ptolomaeus probat per hoc quod impossibile est conjungi simul lineas perpendiculares plures quam tres super unum punctum; omnis autem dimensio mensuratur secundum aliquam lineam perpendicularem" (in De Cael. A 1, 268 a 15, l. 2, n. 7).

Los modernos somos más exigentes y no vemos las cosas tan claras.

Los tres continuos que estudia la Geometría son:

---

[11] "Magnitudo autem (est) quod est divisibile in partes continuas. Quod quidem contingit tripliciter: et secundum hoc sunt tres species magnitudinis" (in Met Δ 13, 1020 a 13, l. 15, n. 978).

[12] Véanse por ejemplo:

in Phys. Δ 2, 209 b 6, l. 3, n. 4.

in Met. A 10, 993 a 15, l. 17, n. 264.

[13] "Mensura autem quaedam est extrinseca et quaedam intrinseca. Intrinseca quidem sicut propria longitudo uniuscujusque et latitudo et profunditas: ab his ergo denominatur aliquid sicut ab intrinseco inhaerente; unde pertinet ad praedicamentum quantitatis. Exteriores autem mensurae..." (in Phys. Γ 3, 202 b 20, l. 5, n. 15).

[14] "Quodlibet corpus particulare est quantitas perfecta secundum suum genus, quia habet tres dimensiones quibus non sunt plures" (in Met. Δ 16, 1021 b 30, l. 18, n. 1042).

1) El cuerpo.
2) La superficie.
3) La línea.

De cada uno de estos continuos da SANTO TOMÁS tres descripciones [15] distintas.

El p r i m e r g r u p o de definiciones es el más filosófico. Describe según la posibilidad de la división.

"*Linea* est quod est divisibile secundum unam dimensionem tantum.

Superficies vero secundum duas.

Corpus autem est omnibus modis divisibile secundum quantitatem, scilicet secundum tres dimensiones.

Et hae descriptiones convertuntur. Nam omne quod duabus dimensionibus dividitur est superficies. Et sic de aliis" (in Met *Δ* 6, 1016 b 25, l. 8, n. 874).

El s e g u n d o g r u p o usa la dimensión propia de cada continuo.

"Longitudo finita dicitur *linea*.
Latitudo finita *superficies*.
Profunditas finita *corpus*" (in Met. *Δ* 13, 1020 a 13, l. 15, n. 978).

El t e r c e r g r u p o considera los límites de cada continuo.

"*Lineae* finitae termini sunt *duo puncta* [16].

---

[15] Usa expresamente esta palabra, por ejemplo (in Met. *Δ* 6, 1016 b 25, l. 8, n. 874).

[16] Como advierte muy bien SANTO TOMÁS:

"Punctum non ponitur in definitione lineae simpliciter sumptae; manifestum est enim, quod in linea infinita et etiam in circulari non est punctum nisi in potentia. Sed EUCLIDES definit lineam finitam rectam; et ideo posuit punctum in definitione lineae, sicut terminum in definitione terminati" (S. Th. 1 q. 85, a. 8 ad 2).

Otro tanto hay que decir de las superficies curvas y sobre todo de las esféricas.

El autor de la *Summa totius Logicae Aristotelicae*, falsamente atribuida a SANTO TOMÁS (véase cap. III, nota 20), expresa esta excepción al decir:

"Superficies vero continet duas dimensiones, scilicet longitudinem et latitunem, cujus extrema sunt duae lineae, vel una, quod dico propter superficiem circularem quae linea terminatur" (tr. III, cap. 5).

Superficiei plures (saltem *tres*) lineae.

Corporis plures (saltem *quatuor*) superficies" (in Phys. Δ 10, 218 a 22, l. 15, n. 6).

Recojamos las reflexiones filosóficas que sobre cada uno de estos continuos sembró SANTO TOMÁS en sus numerosos escritos filosóficos y teológicos.

El problema principal que ofrece el cuerpo matemático es su relación con la superficie.

SANTO TOMÁS vió esta cuestión. Expuso las opiniones de los Pitagóricos y Platónicos: que las superficies eran anteriores al cuerpo [17]; que los cuerpos se resolvían en superficies [18], de donde se seguía que la esencia del cuerpo era la superficie [19]. Pero en ningún lugar he encontrado que manifestase su opinión particular sobre este punto.

Dos frases he encontrado que podrían engendrar confusión.

Dice la primera con sabor platónico:

"Solidum quodammodo resolvitur in superficies" (in Met. Δ 28, 1024 b 10, l. 22, n. 1125).

Pero el contexto de esta frase es muy ajeno a las teorías platónicas y nos manifiesta hermosamente la precisión de los términos filosóficos que ARISTÓTELES emplea.

Ocurre este paso en el comentario al famoso libro Δ de los Metafísicos de ARISTÓTELES, que es como un diccionario de las palabras filosóficas. Más precisamente: en el capítulo 28, donde explica los significados de *γένος* y de *ἕτερος γένει*.

E. BODEWIG (*Zahl und Kontinuum in der Philosophie des hl. Thomas*, Div. Thomas Frib. 13 [1935], p. 206), que cita muchas veces como auténtica esta Summa, considera esta frase como un error de SANTO TOMÁS.

Pero no hay razón para atribuirle un error por un texto apócrifo, cuando claramente enseña lo contrario en sus escritos auténticos.

17 "PLATO voluit quod universalia essent priora in essendo quam singularia et superficies quam corpora et lineae quam superficies et numerus quam omnia alia" (in Met. Δ 11, 1019 a 5, l. 13, n. 950).

18 "Ponebat (PLATO) corpora resolvi in superficies, et superficies in lineas, et lineas in indivisibilia, ut patet in III de Caelo et Mundo" (Γ 1, 299 a 6) cf. l. 3, n. 3. (in Phys. A 3, 187 a 2, l. 7, n. 3).

19 "Unde sequebatur quod punctum sit substantia lineae et linea superficiei et sic de aliis" (in Met. Δ 8, 1017 b 18, l. 10, n. 900).

Además de dos sentidos vulgares [20], distingue Aristóteles otros dos estrictamente filosóficos de *γένος* y a estos últimos opone dos modos diversos de *ἕτερος γένει*.

A nosotros nos interesa sólo el primero de estos modos (el tercero aristotélico).

"Tertio modo dicitur genus, sicut superficies est genus figurarum superficialium, 'et solidum', idest corpus, dicitur esse genus figurarum solidarum, idest corporearum.

Genus autem hoc non est quod significat essentiam speciei, sicut animal est genus hominis; sed quod est proprium subjectum, specie differentium accidentium. Superficies enim est subjectum omnium figurarum superficialium.

Et habet similitudinem cum genere; quia proprium subjectum ponitur in definitione accidentis, sicut genus in definitione speciei. Unde subjectum proprium de accidente praedicatur ad similitudinem generis.

'Una quaeque enim figurarum haec quidem' idest superficies, est talis superficies. 'Hoc autem' idest figura solida, est tale solidum, ac si figura* sit differentia qualificans superficiem vel solidum.

Superficies enim se habet ad figuras superficiales et solidum ad solidas, sicut genus quod subjicitur contrariis. Nam differentia praedicatur in eo quod quale. Et propter hoc, sicut cum dicitur animal rationale significatur tale animal, ita cum dicitur superficies quadrata, significatur talis superficies" (in Met. Δ 28, 1024 a 36, l. 22, n. 1121).

A este modo opone Aristóteles la primera significación de *ἕτερος γένει* [21].

ἕτερα δὲ τῷ γένει λέγεται ὧν ἕτερον τὸ πρῶτον ὑποκείμενον καὶ μὴ ἀναλύεται θάτερον εἰς θάτερον μὴ δ' ἄμφω εἰς ταὐτόν, οἷον τὸ εἶδος καὶ ἡ ὕλη ἕτερον τῷ γένει (Met. Δ 28, 1024 b 9-12).

---

[20] W. D. Ross (*Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, I, p. 342), propone así estos dos modos:

" 'Kind' is applied to

(1) beings of the same type, of which there is continuous generation;
(2) beings with a common ancestor".

Santo Tomás (in h. l. l. 22, n. 1124), dice de estos modos que "non multum pertinent ad philosophicam considerationem".

[21] Así lo nota expresamente Santo Tomás (in h. 1, l. 22, n. 1124): "Ostendit quot modis dicuntur aliqua diversa genere et ponit duos modos respondentes ultimis duobus modis generis".

Santo Tomás, para aclarar este pasaje, añade por su cuenta algunos ejemplos, uno de los cuales es precisamente el que nos ocupa.

"Primo igitur modo dicuntur aliqua genere diversa, quia eorum primum subjectum est diversum.

Sicut primum subjectum colorum est superficies, primum autem subiectum saporum est humor. Unde quatenus ad genus subjectum, sapor et color sunt diversa genere.

Oportet autem quod duo diversa subjecta talia sint quorum unum non resolvatur in alterum.

Solidum enim quodammodo resolvitur in superficies. Unde figurae solidi et figurae superficiales non sunt diversorum generum.

Et iterum oportet quod ambo non resolvantur in aliquod idem.

Sicut species et materia sunt diversa genere, si secundum suam essentiam considerentur, quod nihil est commune utrique. Et similiter corpora caelestia et inferiora sunt diversa genere, inquantum non habent materiam communem" (in Met. Δ 28, 1024 b 10, l. 22, n. 1125).

Del análisis completo de este texto se desprende, pues, que no habla aquí Santo Tomás de una composición ontológica, sino más bien de una puramente lógica y aun así añade prudentemente la partícula *quodammodo* para evitar dificultades.

Ciertamente puede admitirse esta resolución en dos sentidos.

Primero porque los sólidos se clasifican por las superficies que los limitan.

Segundo por el paralelismo que se puede establecer entre los elementos de las figuras y los elementos de los cuerpos, por ejemplo, entre ángulos y diedros y aún entre figuras y cuerpos como entre polígonos y poliedros, paralelogramos y paralelepípedos, etc.

Otro detalle muy instructivo que nos proporciona Santo Tomás en este lugar, explicando la significación de *γένος* será estudiado especialmente en el capítulo VIII de las definiciones matemáticas.

La otra frase confusa dice:

"Est autem cubus corpus contentum ex superficiebus quadratis" (in Met. Δ 25, 1023 b 17, l. 21, n. 1095).

Si interpretamos rigurosamente la frase, deberíamos decir que es platónica, pues 'continere ex' significa componi, constare, consistere [22], pero el contexto no permite tal interpretación.

Ocurre en el mismo libro Δ, al explicar los significados de parte. Basta transcribir el párrafo entero de Cathala para convencerse de ello.

---

[22] Forcellini *Totius latinitatis Lexicon*, s. h. v.

"Tertio modo dicuntur partes in quas dividitur, aut ex quibus componitur aliquod totum; sive sit species, sive aliquid habens speciem, scilicet individuum. Sunt enim, sicut dictum est [23], quaedam partes speciei et quaedam partes materiae quae sunt partes individui.

Aes enim est pars sphaerae aereae, aut cubi aerei, sicut materia in qua species est recepta. Unde aes non est pars speciei, sed pars habentis speciem. *Est autem cubus corpus contentum ex superficiebus quadratis.*

Angulus autem est pars trianguli, sicut speciei, sicut supra dictum est".

Aunque no lo dice expresamente Santo Tomás se puede hacer esta comparación con los últimos ejemplos.

Como el ángulo es parte del Triángulo.
así el cuadrado es parte del Cubo.

Y ningún platónico dijo que el triángulo constase de ángulos.

Santo Tomás, pues, no simpatiza con los Platónicos. Veamos ahora cómo resuelve la cuestión inversa.

La superficie ofrece dos problemas principales. Su relación con el cuerpo y su relación con la línea.

El primero es muy sencillo. La superficie es el límite del cuerpo.

Santo Tomás pone explícitamente este caso, al explicar, siguiendo a Aristóteles la palabra πέρας.

Primus modus dicendi terminus "est secundum quod in qualibet specie magnitudinis, finis magnitudinis vel habentis magnitudinem, dicitur terminus sicut punctus dicitur terminus lineae et superficies corporis..." (in Met. Δ 17, 1022 a 4, l. 19, n. 1045).

El segundo es un problema análogo al que hemos considerado anteriormente del cuerpo respecto a la superficie. De este caso habla expresamente Santo Tomás en el comentario al mismo libro Δ, explicando como se dice "primero en el conocimiento" [24].

"Priora dicuntur etiam secundum rationem, passiones priorum, sicut rectitudo habetur prius laevitate. Rectitudo enim est per se passio lineae, laevitas autem superficiei, linea vero naturaliter est prior superficie.

---

[23] Véanse los textos citados en el Capítulo II (nota 33).

[24] Santo Tomás considera esta significación como uno de los modos de precedencia según el conocimiento (véase n. 947); pero parece más acertado considerarlo como un modo distinto, como lo hacen W. D. Ross *Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, I, p. 316, y H. Bonitz *Aristotelis Metaphysica*, Bonnae, 1849, II, p. 250.

Secundum autem sensum prior est superficies linea, et passiones compositorum passionibus simplicium. Haec igitur dicuntur priora per hunc modum, scilicet, per ordinem cognoscendi" (in Met. Δ 11, 1019 a 1, l. 13, n. 949).

Más abajo volveré sobre este texto. Ahora para cerrar este análisis de la superficie, se puede recoger aquí otro detalle de la precisión que usan Aristóteles y Santo Tomás en sus palabras [25].

"Duo trianguli dicuntur una figura, quod est genus remotum, sed non unus triangulus quod est genus proximum. Cujus ratio est quia hi duo trianguli non differunt per differentias quibus dividitur figura. Differunt autem per differentias quibus dividitur triangulus" (in Met. Δ 6, 1016 a 31, l. 7, n. 863).

De la línea ocurren las mismas cuestiones respecto a la superficie y al punto.

Resolviendo como antes la primera, dice resueltamente:

"Nihil lineae est extra punctum, quod terminat lineam" (in Phys. Z 3, 233 b 35, l. 5, n. 3).

La segunda también la resuelve claramente:

"Non enim linea componitur ex punctis: sed puncta possunt signari in linea, inquantum dividitur" (in Phys. Θ 8, 263 a 28, l. 17, n. 7) [25 b].

Y señala con cuidado el doble papel de este punto de división.

"In lineis mathematicis punctum quod signatur in medio lineae non semper intelligitur ut idem; quia secundum quod dividitur linea intelligitur aliud punctum quod est ultimum unius lineae et aliud secundum quod est ultimum alterius; quia lineae secundum quod sunt divisae actu, intelliguntur ut contiguae, contigua autem sunt quorum extrema sunt simul. Sed secundum quod punctum continuat partes lineae, sic

---

[25] Repite más ampliamente esta misma idea (in Phys. Δ 14, 224 a 9, l. 23, n. 23).

Después de una larga explicación concluye así:

"Manifestum est igitur quod aequilaterus et gradatus idest habens tria latera aequalia sunt una figura, quia continentur sub una specie figurae, quae est triangulus; sed non sunt unus triangulus, quia sunt diversi trianguli species".

[25 b] Véanse también:

in Phys.	Z 1, 231 a 24, l. 1, n. 2
	232 a 17, l. 2, n. 6
in De Cael.	Γ 1, 298 a 4, l. 3, n. 2
in De Gen.	A 4, 316 b 9, l. 4, n. 7

est unum et idem: quia continua sunt quorum terminus est idem" (in Phys. *Δ* 13, 222 a 14, l. 21, n. 2).

El punto, pues, es el último término de la división.

"Ultimi autem termini divisionum sunt puncta" (in De Cael. *Γ* 1, 299 b 23, l. 4, n. 1).

Sobre el punto hace Santo Tomás muy oportunas reflexiones que estudiaré en el capítulo siguiente.

Trata también otras cuestiones sobre las líneas, que no ofrecen dificultad especial para el filósofo: por ejemplo: la comparación entre líneas rectas y curvas [26], distancias mínimas y máximas [27], la unidad máxima de la circunferencia [28], los grados de curvatura, etc. [29].

Y para concluir puedo consignar también aquí otro matiz delicado de la precisión de los términos de Aristóteles y Santo Tomás.

"In Geometria dicitur potentia secundum metaphoram. Potentia enim lineae in geometria dicitur quadratum lineae per hanc similitudinem; quia sicut ex eo quod est in potentia fit illud quod est in actu, ita ex ductu alicujus lineae in seipsam resultat quadratum ipsius. Sicut si diceremus quod ternarius potest in novenarium, quia novenarius

---

[26] "Linea recta et circularis sunt diversae secundum speciem" (in Phys. E 4, 227 b 16, l. 6, n. 4).

"Linea circularis et linea recta non sunt comparabiles, ut possint dici aequales" (in Phys. H 4, 248 b 5, l. 7, n. 5).

[27] "Minima distantia quae est inter quaecumque duo puncta signata, est linea recta, quam contingit esse unam tantum inter duo puncta. Sed lineas curvas contingit in infinitum multiplicari inter duo puncta, secundum quod duae lineae curvae accipiuntur ut arcus majorum vel minorum circulorum.

Et quia omnis mensura debet esse finita (alias non posset certificare quantitatem, quod est proprium mensurae) ideo distantia maxima quae est inter duo, non potest mensurari secundum lineam curvam, sed solum secundum lineam rectam, quae est finita et determinata" (in Phys. E 3, 226 b 33, l. 5, n. 5).

[28] "Linea circularis est maxime una; quia non solum habet continuitatem, sicut linea recta; sed etiam habet totalitatem et perfectionem, quod non habet linea recta. Perfectum est enim et totum, cui nihil deest: quod quidem convenit lineae circulari. Non enim potest sibi fieri additio, sicut fit lineae rectae" (in Met. *Δ* 6, 1016 b 16, l. 8, n. 871).

[29] "...de qualitate circa quantitatem. Et dicit quod si circumferentia et convexitas majoris circuli restringatur ad minorem circulum, manifestum est quod fit magis curvum: non tamen ista ratione quod *ambitus*, idest circularitas facta sit in aliqua parte quae primo non fuisset curvata, sed recta; sed per hoc quod idem ipsum quod prius erat minus curvatum magis curvatur" (in Phys. *Δ* 9, 217 a 33, l. 14, n. 12).

consurgit ex ductu ternarii in seipsum. Nam ter tria sunt novem" (in Met. Δ 12, 1019 b 33, l. 14, n. 974).

SANTO TOMÁS, pues, da acá y acullá algunos datos que nos pueden servir para dar la solución total al problema general que estamos estudiando.

"Secundum sensum, prior est superficies linea", dice expresamente (in Met. Δ 11, 1019 a 1, l. 13, n. 949).

Podemos completar el texto y decir:

Según los sentidos es primero el cuerpo que la superficie,
la superficie que la línea,
la línea que el punto.

Dice en otra parte:

"Corpus mathematicum non est separatum subjecto a corpore naturali" (in An. Post. A 28, 87 a 40, l. 41, n. 11).

Uniendo ambos textos podemos explicar adecuadamente el origen de las tres nociones.

Los sentidos externos contemplan el cuerpo natural.

La imaginación elabora el fantasma del cuerpo natural.

El entendimiento abstrae el cuerpo matemático del cuerpo natural, es decir, considera la cantidad sin considerar los demás accidentes.

A esta idea de cuerpo matemático corresponde en la imaginación un fantasma, limitado al menos por cuatro partes, *en tres direcciones*: es el cuerpo.

Podemos imaginarnos perfectamente estos límites del cuerpo y tendremos en la imaginación un fantasma limitado al menos por tres partes *en dos direcciones*: es la superficie.

De nuevo nos imaginamos estos límites de la superficie y tendremos en la imaginación un fantasma limitado en dos partes, pero *en una sola dirección* es la línea.

Este último límite no nos lo podemos imaginar, pero entendemos perfectamente que en él ya ni hay partes, ni límites, ni dirección: es el punto.

Este es el origen de las primeras nociones geométricas [30].

Pero SANTO TOMÁS dice también, en otro sentido, lo contrario.

"Linea naturaliter est prior superficie" (lugar citado).

Completando el texto paralelamente al anterior, podemos asimismo decir "Naturaliter" es primero el punto que la línea

la línea que la superficie
la superficie que el cuerpo.

¿Qué quiere decir "naturaliter"?

Por el contexto (nn. 946-949), hemos de decir que "naturaliter" se opone a "secundum sensum", o sea,
equivale a "secundum rationem".

Es decir que lógicamente, no podemos concebir una línea sin concebir, al menos implícitamente, dos puntos; ni una superficie sin líneas, ni un cuerpo sin superficies.

Claramente explica SANTO TOMÁS esta dependencia de los continuos geométricos; al explicar el primer modo de predicar *καθ' αὑτό*.

"In definitione lineae ponitur punctum; unde punctum *per se* inest lineae.

Rationem autem quare ista ponantur in definitione subjungit (ARIS-

---

[30] No es ésta, como es natural, la única explicación posible. Otra más intelectual nos propuso el P. HOENEN en su *Curso de Filosofía de la Geometría* de 1935-1936.

El entendimiento considera el extenso, que ha abstraído de la realidad, como divisible.

Al dividirlo en dos partes, necesariamente he de pasar de la parte primera a la segunda sin medio: es el límite del cuerpo que ya no puedo dividir en un sentido.

Este límite es también divisible. Divido en dos. Entre una parte y otra no hay medio. Es el límite del límite del cuerpo que no puedo ya dividir en otro sentido.

Este segundo límite es todavía divisible. Lo divido, el nuevo límite ya no puede ser dividido. No tiene dimensiones.

el límite anterior tiene sólo 1 dimensión
el límite anterior tiene sólo 2 dimensiones
el cuerpo (extenso dado) tiene 3 dimensiones.

Cf. P. HOENEN *De problemate exactitudinis geometricae*: Gregorianum 20 (1939), 321-350.

TOTELES) dicens: *Substantia,* idest *essentia,* quam significat definitio *ipsorum,* idest trianguli et lineae, *est ex his,* idest ex linea et punctis.

Quod non est intelligendum quod linea ex punctis componatur, sed quod punctum sit de ratione lineae, sicut linea de ratione trianguli" (in An. Post. A 4, 73 a 35, l. 10, n. 3).

Y en *la Summa contra Gentiles* (II, 33) dice expresamente:

"Linea non potest intelligi sine puncto".

Otro tanto hay que decir respectivamente de la superficie y del cuerpo.

La superficie no se compone de líneas ni el cuerpo de superficies; pero la línea es parte intrínseca (pars speciei) de la superficie y ésta a su vez del cuerpo.

Cinco veces al menos habla SANTO TOMÁS, de los geómetras que pretenden construir la línea (superficie, cuerpo) por el movimiento de un punto (línea, superficie).

"Secundum geometras qui imaginantur punctum moveri..." (in Phys. E 4, 227 b 16, l. 6, n. 4).

"Geometrae imaginantes quod punctus movetur..." (in De Cael. A 1, 268 a 28, l. 2, n. 9) [31].

Pero, como observa SANTO TOMÁS, hablando del infinito, el movimiento es extenso precisamente por fundarse en la cantidad.

En otro lugar dice explícitamente:

"Punctum est principium lineae non tamen causa" (in Phys. A 1, 184 a 11, l. 1, n. 5) que se puede ampliar perfectamente a la superficie y al punto.

El problema, pues, puede resolverse perfectamente en los dos sentidos indicados, según las enseñanzas de SANTO TOMÁS.

En resumen, como dice admirablemente SANTO TOMÁS:

Scientiae mathematicae "supponunt punctum esse indivisibile; et ita ex punctis non fit linea, quae est divisibilis;

[31] Véanse:

in An. Post.	A 27, 87 a 36, l. 41, n. 4
in Phys.	Δ 11, 219 b 15, l. 18, n. 4
	Θ 3, 253 a 35, l. 5, n. 3
in De Cael.	B 2, 284 a 19, l. 2, n. 11
in De Gen.	A 2, 316 b 9, l. 4, n. 7

supponunt etiam lineam esse longitudinem sine latitudine; et ita ex lineis non fit superficies, quae habet longitudinem cum latitudine, sine profunditate;

et ita ex superficiebus non fit corpus, quod cum longitudine et latitudine habet etiam profunditatem.

Non est autem rectum quod aliquis removeat hujusmodi suppositiones mathematicorum, nisi aliquis afferat probabiliores rationes quam sint istae suppositiones" (in De Cael. Γ 1, 298 a 4, l. 3, n. 2).

Y esta prudente solución de Aristóteles y Santo Tomás es la que prevalece también entre los filósofos matemáticos modernos, principalmente los de la escuela intuicionista.

Dice, por ejemplo, Brouwer (*Over de grondslagen der wiskunde,* Amsterdam, 1907, p. 150):

"No existe el continuo como un sistema de puntos individuados matemáticamente". ("noch het geheel der getallen... noch het continuum als systeem van geindividualiseerde punten wiskunde bestaan").

El análisis de Cauchy, Weierstrasz y Dedekind no deja construir aritméticamente el continuo, pues deja siempre la posibilidad de construir nuevos números reales, como queda siempre la posibilidad de señalar nuevos puntos en una línea.

De este análisis dice O. Hoelder (*Die mathematische Methode,* Berlin, Springer, 1924, p. 193):

"Eine solche gänzlich unbestimmte Gesamtheit dürfte aber einen unzulässigen Begriff vorstellen; demgemäsz bin ich der Ansicht, dass *das Kontinuum nicht rein arithmetisch erzeugt werden kann".*

Si la "teoría de los conjuntos" (Mengenlehre) de Cantor fuese verdadera, el continuo construido aritméticamente sería una realidad. Pero las famosas "antinomias" de esta teoría son verdaderas contradicciones.

Hilbert, por ejemplo, rechaza abiertamente el infinito actual que Cantor supone en su teoría. Véase, por ejemplo, lo que dice en su Apéndice VIII *Ueber das Unendliche* de sus famosos *Grundlagen der Geometrie* (ed. 7 Leipzig, Teubner, 1930, p. 288):

"Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden noch als Grundlage in unserem verstandesmässigen Denken zulässig".

Basten aquí estas breves indicaciones, que serán naturalmente más desarrolladas en el capítulo dedicado al Infinito, para indicar el valor que tienen aun modernamente las concepciones aristotélico-tomistas sobre las primeras nociones de la Geometría.

CAPITULO V

LAS PRIMERAS NOCIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS COMPARADAS

En los dos capítulos anteriores he estudiado separadamente las primeras nociones aritméticas y geométricas. En éste voy a compararlas mutuamente.

Primeramente, la unidad y el punto;
en segundo lugar, el número y el continuo; y, aprovechando la ocasión, finalmente, la aritmética y la geometría.

I. La unidad y el punto.

La unidad ha quedado suficientemente declarada en el capítulo tercero, pero del punto no he hecho sino recoger algunos detalles que se referían a su relación con la línea.

Esta diversidad no es casual. Es más necesario para la aritmética conocer la unidad que para la geometría conocer el punto.

Antes, pues, de comparar la unidad y el punto, será conveniente resumir aquí la doctrina de SANTO TOMÁS sobre el punto.

Tres definiciones se encuentran en SANTO TOMÁS.

Primeramente la de EUCLIDES [1]: **σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν.**

---

[1] EUCLIDES usa generalmente **σημεῖον** (= **σῆμα** = signo).

ARISTÓTELES usa preferentemente **στιγμή** de **στίζω** (punzar), aunque también usa **σημεῖον**. Véase H. BONITZ *Index Aristotelicus*, 701 b 22-46 (**στιγμή**), 677 b 35-49 (**σημεῖον** mathem. Punctum).

Santo Tomás explica la forma negativa de esta definición por la simplicidad del punto, que no puede ser aprendida directamente por nuestro entendimiento.

"Simplicia consueverunt per negationem definiri, sicut punctus est cujus pars non est. Quod non ideo est, quod negatio sit de essentia eorum; sed quia intellectus noster, qui primo apprehendit composita, in cognitionem simplicium pervenire non potest, nisi per remotionem compositionis" (S. Th. 1, q. 10, a. 1, ad 1) [2].

Más frecuentemente ocurren en Santo Tomás definiciones como estas, muy conformes a la doctrina que quedó expuesta en el párrafo anterior [3].

"Punctum nihil aliud est quam quaedam divisio partium lineae" (in De Gen. A 2, 316 a 24, l. 4, n. 4).

"Punctus in actu nihil aliud est quam divisio in actu lineae" (in De Gen. A 2, 317 a 2, l. 5, n. 6).

"Punctum est quoddam indivisibile quod terminat et dividit lineam" (in An. Post. B 12, 95 a 28, l. 10, n. 7).

"Punctum est ipsa lineae divisio" (in Phys. Z 6, 236 b 33, l. 8, n. 4).

La tercera definición nos lleva en seguida a considerar la relación entre la unidad y el punto.

Aristóteles definió muy bien el punto, al decir: *στιγμὴ τὸ πάντῃ [ἀδιαίρετον κατὰ τὸ ποσὸν ᾗ ποσὸν] καὶ θέσιν ἔχον* (Met. Δ 6, 1016 b 25, Santo Tomás l. 8, n. 874).

---

[2] Véase también:

"Intellectus accipiens quidditatem eorum (simplicium) non comprehendit ea, quasi componens definitionem eorum ex diversis principiis; sed magis per modum negationis, sicut punctus est cujus pars non est..." (in Met. Δ 6, 1017 a 1, l. 7, n. 865).

[3] Aristóteles usa también frecuentemente descripciones parecidas.

Véanse, por ejemplo:

Phys.	Δ	11,	220	a	10
	Z	1,	231	b	9
De An.	Γ	6,	430	b	20
Met.	K	2,	1060	b	15
	N	3,	1090	b	6

Una línea antes había dicho: *τὸ πάντῃ [ἀδιαίρετον κατὰ το ποσὸν ᾗ ποσὸν] καὶ ἄθετον λέγεται μονάς.*

Era, pues, natural una mutua substitución:
στιγμὴ μονάς ἐστι θέσιν ἔχουσα (De An. A 4, 409 a 6, S. Tomás, l. 11, n. 169).
ἡ μονάς στιγμὴ ἄθετος ἐστιν (Met. M. 8, 1084 b 26).

Más aún. Una como especificación de otra idea anterior:
τὸ δὲ μηδαμῇ διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν στιγμὴ καὶ μονὰς,
ἡ μὲν ἄθετος μονὰς.
ἡ δὲ θετὸς στιγμή (Met. Δ 6, 1016 a 29) [4].

Esta semejanza se convertía en esta otra para los Platónicos que creían que la unidad era la substancia de todas las cosas:
μονὰς οὐσία ἄθετος [5].
στιγμὴ δὲ οὐσία θετός (An. Post. A 27, 87 a 36 S. Tomás l. 41, n. 4).

Santo Tomás, comentando este último texto, nota muy bien:

a) la doctrina que enseña Aristóteles en este lugar;
b) el ejemplo que usa, y
c) el valor de este ejemplo en la doctrina de Aristóteles.

a) "Tertium modum (comparationis scientiae ad scientiam secundum certitudinem) ponit dicens, quod scientia quae est ex paucioribus est prior et certior ea quae est *ex appositione*, idest quam illa quae se habet ex additione.

b) Et ponit exemplum. Sicut geometria est posterior et minus certa quam arithmetica: habent enim se ea de quibus est Geometria ex additione ad ea de quibus est arithmetica.

Santo Tomás (in h. 1, l. 8, n. 874) ni siquiera introduce en su Comentario esta sentencia.

Aristóteles alude también a esta mutua dependencia en sus *'Αναλύτικα ὕστερα*:

αἱ μονάδες ταῖς στιγμαῖς οὐκ ἐφαρμόττουσιν: αἱ μὲν γὰρ οὐκ ἔχουσι θέσιν, αἱ δὲ ἔχουσιν (An. Post. A 32, 88 a 33).

Santo Tomás (in h. 1, l. 43, n. 5) sólo repite esta frase, sin añadir ningún comentario.

[5] Proclo (*in Euclidis Comment.*, ed. *Friedlein*, (Leipzig, Teubner, 1873, p. 95 sq.), pone esta definición de punto como propia de los Pitagóricos.

Et hoc quidem planum est videre secundum positiones platonicas, secundum quas hic ARISTOTELES exponit, utens eis ad propositum ostendendum: sicut frequenter in libris logicae utitur opinionibus aliorum philosophorum ad propositum ostendendum per viam exempli".

Aquí expone ampliamente la doctrina de PLATÓN sobre la unidad y el punto. Luego trata de sintetizar estos modos:

"Secundum hoc patet quod comparatio certitudinis scientiarum accipitur hic secundum duo.

Nam primus modus accipitur secundum quod causa est prior et certior suo effectu.

Alii autem duo modi accipiuntur secundum quod forma est certior materia, utpote quia forma est principium cognoscendi materiam.

Est autem duplex materia, ut dicitur in VII Metaphysicae (Z 10, 1036 a 9) [6]: una quidem sensibilis, secundum quam accipitur secundus modus; alia vero intelligibilis, scilicet ipsa continuitas, et secundum hanc accipitur tertius modus".

Y termina diciendo:

c) "Et quamvis hic tertius modus expositus sit secundum opinionem PLATONIS, tamen etiam secundum opinionem ARISTOTELIS punctus se habet ex additione ad unitatem. Nam punctum est quoddam unum indivisibile in continuo, abstrahens secundum rationem a materia sensibili; unum autem abstrahit et a materia sensibili et ab intelligibili" (in An. Post. A 27, 87 a 36, l. 41, n. 4.5).

Pero no siempre tiene presente SANTO TOMÁS esta distinción.

Algunas veces habla como si fuese platónico.

"Punctus addit supra unitatem situm: nam ens indivisibile rationem unitatis constituit: et haec secundum quod habent rationem mensurae, fit principium numeri. Punctus autem supra hoc addit situm" (in Met. A 2, 982 a 26, l. 2, n. 47).

"Inter unitatem et punctum nulla differentia est, nisi quod punctus habet positionem; est enim punctum unitas positionem habens" (in De An. A 4, 409 a 6, l. 11, n. 187).

"Magnitudo enim addit positionem supra numerum unde punctus dicitur esse *unitas posita*" (in De Cael. A 2, 268 b 18, l. 3, n. 6).

Otras veces, en cambio, afirma resueltamente —contra los plató-

[6] Véanse los textos citados en el capítulo II (nota 28).

nicos—, que la unidad y el punto no son lo mismo. Véanse los lugares paralelos en que acentúa estas diferencias.

"Punctus et unitas non sunt idem ut Platonici posuerunt, dicentes quod punctum est unitas habens positionem. Et quod non sint idem patet ex duobus.	"Unitas et punctum non sunt idem. Et hoc manifestum fit duabus rationibus.
Primo quidem, quia secundum puncta est contactus, non autem secundum unitates, sed consequenter se habent ad invicem.	Primo quidem, quia puncta sunt in his quae nata sunt se tangere, et secundum puncta aliqua se tangunt ad invicem: in unitatibus autem non invenitur contactus, sed solum hoc quod est consequenter.
Secundo, quia inter duo puncta semper est aliquid medium, ut probatur in sexto Physicorum (Z 1, 231 a 21). Sed inter duas unitates necesse non est aliquid medium" (in Met. K 12, 1069 a 12, l. 13, n. 2415).	Secundo vero, quia inter duo puncta contingit esse aliquid medium; omnis enim linea est media inter duo puncta: sed inter duas unitates non necesse est esse aliquod medium. Patet enim quod inter duas unitates quae constituunt dualitem et ipsam primam unitatem, nihil est medium" (in Phys. E 3, 227 a 27, l. 5, n. 11).

¿Cómo sintetizar estas diferencias?

Desde luego conviene mantener las dos proposiciones que claramente sostiene Santo Tomás, es a saber:

"Punctus et unitas non sunt idem".

"Etiam secundum opinionem Aristotelis punctus se habet ex additione ad unitatem".

Las dos razones con que prueba la primera proposición son claras y manifiestas y podrían añadirse otras.

Pero la razón, que introduce para probar la segunda, parece un poco violenta. Le venía muy bien para completar la síntesis de los tres modos de comparación entre las ciencias y su amor a la síntesis le obligó a una solución confusa.

Es cierto que el punto es una abstracción de la materia sensible y que el uno trascendental abstrae también de la materia inteligible, pero el uno predicamental, principio del número y objeto de la aritmética, del cual se trata aquí, abstrae sólo de la materia sensible [7].

La razón de SANTO TOMÁS no vale; pero la proposición que intenta probar es verdadera.

Varias veces [8] repite ARISTÓTELES esta definición que claramente expresa lo que el punto añade a la unidad: ***στιγμὴ μονὰς θέσιν ἔχουσα.***

No puedo decir hasta dónde llegue la influencia de PLATÓN en esta frase; pero creo que se distingue muy bien de la fórmula estrictamente platónica ***στιγμὴ οὐσία θετός*** que también emplea alguna vez ARISTÓTELES [9].

Lo mismo debo decir de SANTO TOMÁS. Ciertamente que algunas frases se resienten de la influencia pitagórico-platónica; pero nunca llega a identificar el punto con una substancia que era lo característico de PLATÓN.

En resumen. La unidad, tomada en el sentido riguroso de los medievales, y el punto convienen en una nota fundamental: la indivisibilidad.

Pero, se distinguen entre otras notas, por esta característica.

El punto tiene posición.	Del punto vale decir: está en la línea AB, etc.
La unidad no tiene posición.	No tiene sentido decir: la unidad está en...

Considerando únicamente esta nota, podemos ciertamente decir que el punto añade algo a la unidad, sin necesidad de ser platónicos.

---

[7] En otra ocasión se olvida también SANTO TOMÁS del uno predicamental "Indivisibile est duplex.

Unum quod est terminus continui, ut punctus in permanentibus et momentum in successivis...

Aliud autem indivisible est, quod est extra totum genus continui..." (S. Th. 1, q. 8, a. 2 ad 2).

[8] An. Post. A 32, 88 a 33
De An. A 4, 409 a 6
Met. Δ 6, 1016 a 25
M 8, 1084 b 26

[9] An. Post. A 27, 87 a 36

Otras dos notas diferentes señala SANTO TOMÁS:

1) La continuidad de los puntos.
2) El medio entre los puntos.

Otra diferencia típica es ésta:

Unidades repetidas forman un número.
Puntos repetidos no forman nada.

Dejemos esta comparación entre la unidad y el punto, que tiene para los modernos muy poco interés, y comparemos directamente el número y el continuo.

II El número y el continuo.

Conocida es la distinción clásica de la cantidad en continua y discreta.

τοῦ δὲ ποσοῦ τὸ μέν ἐστι διωρισμένον, τὸ δὲ συνεχές (Cat. 6, 4 b 20) [10].

SANTO TOMÁS estudia en diversos lugares las relaciones entre el número y el continuo. Pero en un paso de su Comentario al ***περὶ ψυχῆς***, modelo de concisión y exactitud, los resume admirablemente.

---

[10] La terminología de SANTO TOMÁS es muy fija en este punto. Véanse, por ejemplo:

S. Th.	1, q. 3, a. 5 c.	q. continua	q. discreta
	q. 42, a. 1 ob. 1.	q. continua intrinseca seu magnitudo	„
S. c. G.	1, 43.	q. continua	multitudo
in Phys.	Γ 5, 204 a 9, l. 7, n. 10.	q. c. quae est magnitudo	q. d. quae est multitudo
	Δ 11, 219 b 16, l. 17, n. 11.	q. continua	q. discreta
in Met.	Δ 13, 1020 a 10, l. 15, n. 978.	magnitudo sive mensura	multitudo sive plur.

Pero no siempre que dice "Duplex est quantitas" se refiere a esta división.

Frecuentemente se refiere a otra división más general entre la cantidad dimensiva y la cantidad virtual. Véanse, por ejemplo:

I Sent. d. 3 exp. tex. 2 Par.
d. 17, q. 2, a. 1 c.

Otra vez se encuentra esta división:

quantitas continua et quantitas intensiva

in Phys. Δ 8, 216, a 8, l. 12, n. 10.

"Numerus etiam cognoscitur per negationem continui, quod est magnitudo.

Numerus enim rerum sensibilium, ex divisione continui causatur; unde et proprietates numeri per proprietates continui cognoscuntur.

Quia enim continuum divisibile est in infinitum, et numerus in infinitum crescere potest" (in De An. Γ 1, 425 a 19, l. 1, n. 578).

No se puede perder una línea de este texto. Son cuatro frases que establecen perfectamente las relaciones entre el número y el continuo.

Dejo la última frase para el capítulo siguiente, dedicado expresamente al infinito y voy a analizar las otras tres.

Dice primeramente: "Numerus *cognoscitur* per negationem continui".

"Negación" aquí equivale a "División". Y es claro. Digo que hay *tres* segmentos, cuando hay algo que los separa. Cuento *cuatro* casas, porque están divididas.

Basta reflexionar un poco sobre la operación intelectual, que realizamos al contar. Primero distinguimos los elementos. Luego los coordinamos biunívocamente con la serie de los números naturales. El número correspondiente al último elemento es el *número cardinal* del conjunto que intentábamos contar.

Para contar, pues, es decir, para conocer el número, hay que distinguir, hay que dividir el continuo.

Nota agudamente Santo Tomás que también para medir una cantidad continua hay que emplear la cantidad discreta, es decir, hay que dividir, mentalmente al menos, el continuo.

"Sciendum est ergo quod, cum ratio mensurae primo inveniatur in quantitate discreta, et per ejus naturam in continua, nihil poterit habere rationem mensurae in quantitate continua nisi ex adjunctione quantitatis discretae" (De instantibus c. I) [11].

Pero Santo Tomás va más adelante. Dice también: "Numerus rerum sensibilium ex divisione continui *causatur*".

Dice "numerus rerum sensibilium" para distinguirlo del número trascendental, como lo nota muy bien en un lugar de la Suma.

---

[11] Tal vez en este mismo sentido debe entenderse una frase que ocurre en las cuestiones De Veritate.

"Quantitas per prius dicitur de discreta quantitate quam de continua" (De Ver. q. 2, a. 10, c.).

"In angelis non est numerus qui est quantitas discreta, causatus ex divisione continui: sed causatus ex distinctione formarum, prout multitudo est de transcendentibus" (S. Th. 1, q. 50, a. 3 ad 1) [12].

"Causatur" puede entenderse en dos sentidos. O mejor, aplicarse a dos sujetos.

Primero en sentido ontológico. La multiplicación real de los seres —el número predicamental concreto— se origina físicamente por la división del continuo.

Luego en sentido lógico. La serie de los números naturales —el número predicamental abstracto— se origina lógicamente por la división del continuo.

Lo primero es un aspecto de la famosa tesis tomista: la "materia signata quantitate" es principio de individuación y no ofrece dificultad especial al filósofo de las matemáticas.

Lo segundo es lo que nos interesa. Se trata aquí del origen de la serie de los números naturales en general, no del conocimiento del número de este conjunto en particular, estudiado anteriormente.

Claro que no se trata aquí de la causa eficiente de la serie, que es el entendimiento humano, sino de su fundamento objetivo.

La serie de los números naturales no tiene fin. Justamente esta propiedad se funda en el continuo que siempre puede ser dividido.

Modernamente podemos decir más. Es necesario ampliar el concepto de número para efectuar adecuadamente las operaciones aritméticas y sus inversas. Esta ampliación ha dado origen a los números reales, que se fundan también en la división del continuo.

Esta misma doctrina la propone SANTO TOMÁS más ampliamente en su opúsculo *de Instantibus*.

"Quantitas autem discreta habet originem a quantitate continua, ut dicitur III Phys. (Γ 7, 207 b 10) propter divisionem enim continui est additio in numero: nec forent duae unitates facientes numerum aliquarum rerum, nisi illae res essent divisae ab invicem, in se tamen retinentes unitatem. Divisio autem rerum singularum ejusdem speciei est per materiam non per formam, cum species sequatur formam: species autem una est" (De Instantibus c. 1).

Si el número predicamental se origina por la división del continuo, la noción de número es posterior a la de continuo, aunque por ser

[12] La distinción entre número trascendental y predicamental ha quedado suficientemente estudiada en el Capítulo III.

la noción de número más simple y más abstracta conserva siempre un primado intelectual.

"Numeri secundum rationem sunt priores continuis quantitatibus, sicut magis simplices et magis abstracti" (in Phys. E 3, 227 a 20, l. 5, n. 9).

"Numerus formaliter loquendo, est prius quam quantitas continua: sed materialiter quantitas continua est prior, cum numerus ex divisione continui relinquatur, ut dicitur III Phys." (in Boet. de Trin. q. 4, a. 2, al 6).

Finalmente, SANTO TOMÁS señala otra relación entre el número y el continuo. "Proprietates numeri per proprietates continui cognoscuntur".

Una propiedad común muy interesante en la proporcionalidad.

EUCLIDES en sus *Elementos* estudió
en el libro V las proporciones entre las líneas, y
en los libros VII y IX las proporciones entre los números.

ARISTÓTELES ya había notado esta propiedad común [13].

SANTO TOMÁS trató de investigar sus causas.

"*Vicissim analogum,* idest commutatim proportionari, univoce in multis invenitur, puta in numeris et in lineis, in quibus habet quodammodo eamdem causam et quodammodo aliam.

Aliam quidem secundum speciem, in quantum scilicet alii sunt numeri et aliae lineae;

sed est genere eadem, in quantum scilicet tam lineae quam numeri conveniunt in hoc quod habent tale augmentum, ex quo in eis commutata proportio demonstratur" (in An. Post. B 17, 99 a 6, l. 19, n. 3).

"Esse proportionale commutabiliter convenit numeris et lineis...

Sed ideo commutatim proportionari, de singulis horum seorsum demonstratur, quia non est nominatum illud commune, in quo omnia

---

[13] An. Post. A 5, 74 a 8
B 17, 99 a 6
Met. E 2, 1026 a 27
M 1, 1077 b 17

ista sunt unum. Etsi enim quantitas omnibus his commune sit, tamen sub se et alia praeter haec comprehendit...

Vel melius dicendum quod commutatim proportionari non convenit quantitati, in quantum est quantitas, sed inquantum est comparata alteri quantitati secundum proportionalitatem quandam...

Omnibus tamen istis, inquantum sunt proportionalia, non est nomen commune positum... Non enim commutatim proportionari inest numeris et lineis, secundum quod hujusmodi, sed secundum quoddam commune" (in An. Post. A 5, 74 a 8, l. 12, n. 8).

Nota Santo Tomás que la proporción entre las líneas es más amplia que la proporción entre los números; por esto, aunque en todas las líneas habrá ciertamente una proporción, pero sólo son conmensurables aquellas cuya mutua proporción sea como una proporción entre números. Esta es la razón por la cual no son conmensurables un lado del cuadrado y su diagonal.

"Illae enim solae lineae sunt commensurabiles, quarum proportio ad invicem est sicut proportio numeri ad numerum" (in Met. A 2, 983 a 16, l. 3, n. 67).

Pero la propiedad común fundamental será estudiada en el capítulo siguiente.

III La Aritmética y la Geometría.

Viene bien, para cerrar este capítulo, comparar ahora las ciencias que estudian las nociones que hemos analizado.

La Aritmética y la Geometría son dos ciencias diferentes, por esto una no demuestra nada de la otra [14].

¿Cuál de ellas tendrá la preferencia?

De lo que hemos visto hasta aquí no parece deducirse nada.

Entre la unidad y el punto, la unidad tiene la preferencia: parecería preferida la Aritmética.

En cambio, entre el número y el continuo, las ventajas son del continuo: debería ser preferida la Geometría [15].

---

[14] in An. Post. A 7, 75 a 39, l. 15, n. 2.

[15] Así lo hemos visto en el párrafo anterior. Sin embargo, explicando el origen de la opinión de los Pitagóricos sobre la substancia de los números, dice: "Inter mathematica numeri sunt priores" (in Met. A 3, 985 b 26, l. 7, n. 120).

Para ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS prevaleció el primer criterio. Claramente dan la preferencia a la Aritmética.

Las proposiciones con que indican esta preferencia son diferentes:

1) La Geomería usa los principios de la Aritmética, por tanto,

2) La Aritmética es más cierta que la Geometría, y

3) La Aritmética es anterior a la Geometría.

Pero las razones que aducen son siempre las mismas:

1) Las ciencias que añaden algo a otras son menos ciertas.

2) Los objetos de la Geometría añaden algo a los objetos de la Aritmética.

He aquí los textos principales:

"Quanto aliquae scientiae sunt priores naturaliter, tanto sunt certiores; quod ex hoc patet, quia illae scientiae, quae dicuntur ex additione ad alias sunt minus certae scientiis quae pauciora in sua consideratione comprehendunt ut arithmetica certior est geometria, nam ea quae sunt in Geometria sunt ex additione ad ea quae sunt in arithmetica" (in Met. A 1, 982 a 26, l. 2, n. 47).

"Scientia quae se habet ex additione ad aliam, utitur principiis ejus in demonstrando, sicut geometria utitur principiis arithmeticae" (in De Cael. A 2, 268 b 18, l. 3, n. 6).

"Geometria est posterior et minus certa quam arithmetica: habent enim se ea de quibus est geometria ex additione ad ea de quibus est arithmetica" (in An. Post. A 27, 87 a 36, l. 41, n. 4).

Muy conforme es, pues, este dicho de SANTO TOMÁS, entre las partes de las Matemáticas, la aritmética es la principal y la geometría secundaria.

"Mathematica habent diversas partes et quamdam principaliter sicut arithmeticam et quamvis secundario sicut geometriam" (in Met. Γ 2, 1004 a 6, l. 2, n. 563).

Era ésta la idea general de lo que creían los matemáticos que se estudiaban en el siglo XIII.

BOECIO, por ejemplo, llamaba la aritmética, "ea quae principium matrisque quodammodo ad caeteras obtinet portionem" (PL 63, 1082).

CAPITULO VI

EL INFINITO [1]

Para terminar el análisis de las primeras nociones, estudiaré en este capítulo una noción fundamental, común al número y al continuo, que dejé suspensa en el capítulo anterior, es decir: el Infinito.

Varias veces se ocupan ARISTÓTELES [2] y SANTO TOMÁS [3] de esta noción. Pero el infinito es una de las cuestiones físicas fundamentales que estudia magistralmente ARISTÓTELES en su famoso libro *φυσικῆς ἀκροάσεως*.

---

[1] Sobre este mismo tema han escrito, aunque limitándose a la Suma teológica:

G. LANGENBERG *Des hl. Thomas Lehre von Unendlichen und die nuerere Mathematik*, Phil. Jarb 30 (1917), 79-97; 172-191.

C. ISENKRAHE *Die Lehre des hl. Thomas von dem Unendlichen, ihre Auslegung durch Prof. Langenberg und ihr Verhältnis zur neuzeitlichen Mathematik*, Bonn, 1920.

Tema más amplio desarrolla A. DEMPF *Das Unendliche in der mittelalterlichen Metaphysik und in der kantischen Dialektik*, Münster, Aschendorf, 1926.

[2] Phys. Γ 4-8.
De Cael. A 7.
Met. K 10.

[3] Además del Comentario a los tres lugares citados de ARISTÓTELES, le dedica en la Suma siete artículos:

1, q. 7, a. 1-4.
q. 14, a. 12.
q. 53, a. 3.
3, q. 10. a. 3

Este es el lugar clásico que nos conviene estudiar, teniendo por guía a SANTO TOMÁS, que comentó con esmero [4] este tratado [5].

La cuestión, que trata de resolver, es doble:

θεωρῆσαι περὶ ἀπείρου

εἰ ἔστιν ἢ μή,
καὶ εἰ ἔστιν τί ἔστιν

(202 b 35-36).

Los argumentos en pro y en contra manifiestan la dificultad de esta cuestión.

Por esto, para evitar otras dificultades SANTO TOMÁS precisa exactamente el sentido de la palabra Infinito.

"Ostendit quot modis dicitur infinitum et ponit duas [6] divisiones

---

[4] Véase, por ejemplo el elogio que hace de este Comentario Agustín NIFO en el Prefacio de su versión y exposición de los Físicos, Venecia, 1543 (en la ed. Leonina, vol. II, p. vi):

"Hunc (THOMAM AQUINATEM) habemus non modo in his physicis commentationibus, sed in omnibus aliis fidum ducem, cui etiam non ab re nomen expositoris tributum est. Isto enim (pace graecorum expositorum dixerim) curiosior aut uberior, aut (quod raro est) clarior inventus est nemo: unde nostro judicio omnis Latii, omnisque Philosophiae decus semper habendus est".

[5] Véase la división más detallada que hace SANTO TOMÁS.

- Prooemium (l. 6)
- Rationes pro (l. 7, 1-6)
- Sensus Quaestionis et Infiniti (l. 7, 7-9)
- Rationes contra
  - inf. separatum (l. 7, 10-13)
  - inf. in rebus
    - Logicae (l. 8, 1-4)
    - Naturales
      - supposito num. fin. elem. (l. 8, 5-9)
      - simpliciter (l. 9)
- Solvit Quaestiones
  - An sit (l. 10)
  - Quid sit
    - Definitio (l. 11)
    - Ex qua explicantur dicta de inf. (l. 12)
- Solvuntur difficultates (l. 13)

[6] SANTO TOMÁS al comentar el lugar paralelo de ARISTÓTELES (in Met. K 10, 1066 a 35 - b 1, l. 10, n. 2314-2321) dice de estas divisiones:

Infiniti. Quarum prima est communis infinito et omnibus privative dictis [7].

Uno modo dicitur infinitum, quod non est natum transiri (nam infinitum idem est quod intransibile): et hoc est quia est de genere intransibilium, sicut indivisibilia, ut punctus et forma... [8].

Alio modo dicitur Infinitum quod quantum est de se transiri potest, sed ejus transitus non potest perfici a nobis, sicut si dicatur profunditas maris esse infinita: vel si potest perfici, tamen vix et cum difficultate, sicut si dicamus quod iter usque in Indiam est Infinitum... [9].

"Primo ostendit quot modis dicitur infinitum in actu.

Secundo quot modis dicitur infinitum in potentia" (n. 2314).

Siendo idéntico el texto del Filósofo en los Metafísicos distingue una significación más, es decir, divide en dos la que aquí pone en segundo lugar.

[7] Véase in Met. Δ 21, 1022 b 32, l. 20, n. 1074-1079, las distintas significaciones del ἀ privativo.

[8] Nota W. D. Ross (*Aristotle's Physics*, Oxford, 1936, p. 547).

"This is the purely negative sense ('not limited') in which even something non quantitative such as a *πάθος* or *στιγμή* might be said to be *ἄπειρον* (202 b 33), as opposed to the privative sense in which *ἄπειρον* might be applied to that which, being a *ποσόν*, so far as its generic nature goes might be traversed, but in virtue of its specific or individual nature cannot be completely traversed, or can be traversed only with difficulty".

Santo Tomás usa frecuentemente esta distinción de infinito negative e infinito privative, propio de la cantidad, aplicándolo a materias teológicas.

Véanse, por ejemplo:

S. Th.	1, q. 7, a. 1, c.
	3, q. 10, a. 3, ad 1.
S. c. G.	1, 43.
	3, 54.
I Sent.	d. 3, q. 1, a. 1, ad 4.
	d. 43, q. 1, a. 1, c.
4 Sent.	d. 49, q. 2, a. 1, ad 12
De Pot.	q. 1, a. 2, c.
	ad 2.
De Ver.	q. 2, a. 2 ad 5.
	a. 9 ad 5.
Quodl.	10, q. 2, a. 4 ad 2.

[9] Casos en que ocurre esta interpretación vulgar del infinito son varios. Véanse, por ejemplo: S. Th. 1, 2 q. 18, a. 7 sed. c.

in An. Post.	A 32, 88 b 6, l. 43, n. 7
in Phys.	B 5, 197 a 16, l. 9, n. 2
in Met.	B 3, 998 b 32, l. 8, n. 435
	4, 999 a 27, l. 9, n. 444
	Γ 4, 1006 b 2, l. 7, n. 615
	E 2, 1026 b 7, l. 2, n. 1174

Tertio modo dicitur infinitum quod est natum transiri quasi de genere transibilium exsistens, quod tamen non habet transitum ad finem; ut si esset aliqua linea non habens terminum, vel quaecumque alia quantitas: et sic proprie dicitur infinitum.

Aliam divisionem propriam infiniti [10] ponit... dicens quod infinitum dicitur

vel per appositionem, sicut in numeris;
aut secundum divisionem, sicut in magnitudinibus [11]
aut utroque modo, sicut in tempore" (204 a 2-7) l. 7, n. 9.

Dice Aristóteles que la cuestión de la existencia del Infinito en Matemáticas es más amplia que la cuestión de la existencia del Infinito en las cosas sensibles.

ἀλλ' ἴσως αὕτη μὲν ἐστι καθόλου ἡ ζήτησις, εἰ ἐνδέχεται ἄπειρον καὶ ἐν τοῖς μαθηματικοῖς εἶναι καὶ ἐν τοῖς νοητοῖς καὶ μηδὲν ἔχουσι μέγεθος (204 a 34 - b 1).

Pero de hecho, estudia simultáneamente las dos cuestiones.

Actualmente no existe el Infinito. Ni como una substancia separada como quería Platón ni como una propiedad de los seres. Así lo exigen una multitud de razones lógicas y físicas.

Las razones lógicas se llaman así como advierte Santo Tomás "non quia ex terminis logicis logice procedant, sed quia modo logico procedunt, scilicet ex communibus et probabilibus, quod est proprium syllogismi dialectici".

Un cuerpo no puede ser infinito, por estar siempre limitado por una superficie (204 b 4-7).

Un número no puede ser infinito por estar siempre limitado por una unidad (204 b 7-10).

---

[10] En el ***περὶ οὐρανοῦ*** investiga si el universo goza de alguna de estas infinidades.

"Primo igitur inquirit utrum universum sit infinitum secundum magnitudinem (l. 9-15).

Secundo utrum sit infinitum secundum multitudinem, utrum scilicet sit unus mundus tantum vel infiniti seu plures (l. 16-21).

Tertio utrum sit infinitum duratione, quasi semper exsistens" (l. 22-29).

[11] Nota Bonitz *Index Aristotelicus*, 74 a 46-55 las fórmulas equivalentes a ***κατά πρόσθεσιν*** y ***κατὰ διαίρεσιν***.

Nótese ésta especialmente:

κατὰ πρόσθεσιν = τοῖς ἐσχάτοις (Phys. Z 2, 233 a 19, l. 4, n. 2; H 1 242 a 30, l. 2, n. 2).

Pero, como muy justamente observa SANTO TOMÁS:

"Attendendum est autem quod istae rationes sunt probabiles, et procedentes ex iis quae communiter dicuntur. Non enim ex necessitate concludent: quia qui poneret aliquod corpus esse infinitum, non concederet quod de ratione corporis esset terminari superficie, nisi forte secundum potentiam; quamvis hoc sit probabile et famosum.

Similiter qui diceret aliquam multitudinem esse infinitam, non diceret eam esse numerum, vel numerum habere. Addit enim numerus super multitudinem rationem mensurationis: est enim numerus multitudo mensurata per unum, ut dicitur X Met. (I 6, 1057 a 3). Et propter hoc numerus ponitur species quantitatis discretae, non autem multitudo, sed est de transcendentibus" (l. 8, n. 4).

Las razones físicas no interesan al matemático; pero obligan al filósofo a concluir con ARISTÓTELES ***ὅτι μὲν οὖν ἐνεργείᾳ οὐκ ἔστι σῶμα ἄπειρον, φάνερον ἐκ τούτων*** (206 a 7-8).

ARISTÓTELES habla aquí sólo en general de un cuerpo infinito actual y lo mismo repite SANTO TOMÁS en este lugar.

Pero en la *Summa Theologica* es más preciso:
distingue primero entre "infinitum actu secundum magnitudinem"
e "infinitum actu secundum multitudinem"

Vuelve a distinguir con respecto al primero entre cuerpo natural y cuerpo matemático.

"De corpore quidem naturali, quod non possit esse infinitum in actu, manifestum est. Nam omne corpus naturale aliquam formam substantialem habet determinatam; cum igitur ad formam substantialem sequantur accidentia, necesse est, quod ad determinatam formam sequantur determinata accidentia inter quae est quantitas. Unde omne corpus naturale habet determinatam quantitatem et in majus et in minus. Unde impossibile est aliquod corpus naturale esse infinitum.

De corpore etiam mathematico eadem ratio est, quia si imaginemur corpus mathematicum exsistens actu, oportet quod imaginemur ipsum sub aliqua forma, quia nihil est actu nisi per formam suam; unde, cum forma quanti, inquantum hujusmodi sit figura, oportebit quod habebit aliquam figuram; et sic erit finitum: est enim figura quae termino vel terminis comprehenditur" (S. Th. 1, q. 7, a. 3).

Con respecto a la multitud distingue también entre
"multitudo per se",
y "multitudo per accidens";
pero de ambas niega la infinitud.

"Omnem multitudinem oportet esse in aliqua specie multitudinis. Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem species numerorum est infinita, quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile est esse multitudinem infinitam actu, sive per se, sive per accidens.

Item omnis multitudo in rerum natura exsistens est creata, et omne creatum sub aliqua certa intentione creantis comprehenditur, non enim in vanum agens aliquod operatur. Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata comprehendantur; impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens" (S. Th. 1, q. 7, a. 4) [12].

¿Se refiere a estas dos razones SANTO TOMÁS cuando al fin de su opúsculo *De aeternitate mundi contra murmurantes*, dice resueltamente: "Adhuc non est demonstratum quod Deus non possit facere ut sint infinita actu"? [13].

Pero, si de ninguna manera existe el infinito "multa impossibilia accidunt", dice SANTO TOMÁS.

"Quorum unum est quod tempus habebit principium et finem: quod reputatur inconveniens secundum ponentes aeternitatem mundi.

Et iterum sequitur quod magnitudo non semper sit divisibilis in magnitudines, sed quandoque deveniatur per divisionem magnitudinum ad quaedam quae non sunt magnitudines, sed omnis magnitudo est divisibilis.

Item sequetur quod numerus non augeatur in infinitum.

---

[12] Podrían, tal vez, admitirse una magnitud y multitud infinitas puramente imaginarias, según lo que dice en otro lugar SANTO TOMÁS:

"Cum dicitur supra caelum nihil est, ut supra designat locum imaginatum tantum, secundum quod possibile est imaginari, dimensionibus caelestis corporis dimensiones alias superaddi" (S. Th. 1, q. 46, a. 1 ad 8).

[13] Baste consignar aquí estos datos tomados de MANDONNET *Des Ecrits authentiques de Saint Thomas d'Aquin*, Fribourg, 1910, p. 104:

SANTO TOMÁS empezó a escribir la Suma Teológica en 1265.

El Comentario a los Físicos, en que habla contra la primera de las razones aducidas en la Suma, hacia 1265.

Finalmente, el opúsculo *De aeternitate mundi*, en que habla absolutamente, en 1270.

Quia, igitur, secundum determinata, neutrum videtur contingere, neque scilicet quod infinitum sit actu, neque quod simpliciter non sit; necesse est dicere quod quodammodo est, quodammodo non est" (206 a 9-14, l. 10, n. 2).

Es decir, que el infinito existe sólo en potencia.

"Aliquid dicitur esse in actu et aliquid dicitur esse in potentia. Infinitum dicitur esse per appositionem, sicut in numeris vel per ablationem, sicut in magnitudinibus. Ostensum est enim quod magnitudo non est actu infinita; et sic in magnitudinibus per appositionem infinitum non invenitur, sed per divisionem in eis invenitur infinitum. Non enim est difficile destruere opinionem dicentium indivisibiles esse lineas... [14]. Dicitur autem infinitum in appositione vel divisione, secundum quod potest apponi vel dividi. Relinquitur igitur quod infinitum sit tamquam in potentia ens" (206 a 14-18, l. 10, n. 3).

Pero esta potencia es una potencia especial. No es como el bronce que después es estatua, sino como un juego, cuyas partes existen sólo sucesivamente.

"Dupliciter enim invenitur aliquid in potentia:

uno modo sic quod totum potest reduci in actum, sicut possibile est hoc aes esse statuam, quod aliquando erit statua; non autem sic dicitur infinitum in potentia quod postea sit in actu.

Alio modo aliquid dicitur in potentia esse, quod postea fit actu ens, non quidem totum simul sed successive. Multipliciter enim dicitur aliquid esse: vel quia totum est simul, ut homo et domus; vel quia semper una pars ejus fit post aliam, per quem modus dicitur esse dies et ludus agonalis. Et hoc modo dicitur infinitum esse simul et in potentia et in actu: omnia enim hujusmodi sunt in potentia quantum ad unam partem et in actu quantum ad aliam..." (206 a 18-25, l. 10, n. 4).

Este infinito en potencia basta para todas las demostraciones matemáticas.

"Non enim indigent ad suam demonstrationem infinito in actu, neque

---

[14] ARISTÓTELES atribuye esta opinión a PLATÓN (Met. A 9, 992 a 20; l. 16, n. 257).

Otros la atribuyen a XENOCRATES. Véase por ejemplo PROCLO in *Euclidis Commentarium*, ed. *Friedlein*, p. 279, l. 5 y otros Comentadores griegos citados por W. D. ROSS *Aristotle's Physics*, Oxford, 1936, p. 554.

eo utuntur: sed solum indigent quod sit aliqua linea finita tanta quanta est eis necessaria, ut ex ea possint substrahere quod volunt. Et ad hoc sufficit quod aliqua maxima magnitudo sit; quia alicui maximae magnitudini competit, quod possit dividi secundum quantamcumque proportionem respectu alterius magnitudinis datae.

Unde ad demonstrandum non differt utrum sit hoc modo vel illo, scilicet vel infinita vel finita [18] maxima quantitas.

Sed quantum ad esse rei multum differt, utrum sit vel non sit" (207 b 27-34, l. 12, n. 9).

La definición real de este infinito es: *οὗ ἀεί τι ἔξω ἔστι* 207 a 1.

Para completar la solución de la existencia del Infinito establezcamos una comparación entre varias clases de infinitos.

Primeramente entre el infinito del tiempo y de la generación con el infinito en la cantidad.

Ambos c o n v i e n e n en que el infinito está en la sucesión que siempre va añadiendo algo, aunque lo que actualmente existe es siempre finito.

Pero se d i f e r e n c i a n en que esto finito que existe actualmente se corrompe en uno y permanece en otro (206 a 25-b 3).

Comparemos, ahora, los dos tipos de infinito que se encuentran en la cantidad, pues nos interesan especialmente.

Uno se origina del otro. Por esto, el primer sujeto del infinito es el continuo.

"Et hoc apparet, quia infinitum quod est in numeris causatur ex infinita divisione magnitudinis; et similiter infinitum in tempore et motu causatur ex magnitudine: unde relinquitur quod p r i m u m s u b j e c t u m i n f i n i t i s i t c o n t i n u u m" (207 b 34, l. 12, n. 10).

Cuanto más se divide, más se añade. Como se admite la división en infinito, así también se admite la adición en infinito.

"Dicit ergo primo quod quodammodo infinitum secundum appositionem est idem cum infinito secundum divisionem; quia infinitum secundum appositionem fit e converso secundum divisionem cum infinito. Secundum enim quod aliquid dividitur in infinitum, secundum hoc in infinitum videtur posse apponi ad aliquam determinatam quantitatem" (l. 10, n. 8).

---

[18] Véase Euclides *Elementos*, VI, 10, ed. Heiberg, vol. II, p. 38.

Pero es necesario explicar bien en qué consiste esta división en infinito para evitar dificultades. SANTO TOMÁS lo explica muy claramente.

"Manifestat igitur quomodo sit infinitum divisione in magnitudine. Et dicit quod si aliquis in aliqua magnitudine finita, accepta aliqua parte determinata per divisionem, semper accipiat dividendo alias partes secundum eamdem *rationem*, idest proportionem, sed non secundum eamdem quantitatem in eadem proportione, non pertransibit dividendo illud finitum; puta si ab aliqua linea cubitali accipiat medietatem, et iterum a residuo medietatem [16]; et sic in infinitum procedere potest [17]. Serva-

---

[16] Nota muy bien el P. HOENEN (*Cosmologia*, Romae, 1936, p. 25), que los Escolásticos sólo consideraban la división en mitades y tercios; pero vale lo mismo de cualquier serie proporcional, por ejemplo del factorial 1/n!

[17] Viene bien subrayar este pensamiento que alguna vez se ha descuidado.

Suele decirse absolutamente, por ejemplo, en los argumentos para demostrar la existencia de Dios, "Repugna el proceso en infinito".

Dicha así en absoluto esta proposición es falsa y ha sido ocasión de malas inteligencias entre filósofos y matemáticos, como pasó en el Congreso de la Asociación Española para el progreso de las ciencias celebrado en Barcelona en Mayo de 1929 (Véase Ibérica 32 [1929], 2° 18).

Nunca habla así absolutamente SANTO TOMÁS. Siempre señala los elementos de la serie en que no se puede dar este proceso.

Véanse algunos ejemplos:

in principiis	in An. Post. A 3, 72 b 8, l. 7, n. 3.
in demonstrationibus	19-22, 81 b 10-84 b 2, l. 31-35
item	B 3, 90 b 26 l. 2, n. 9
in mediis	12, 95 a 27 l. 10, n. 6.
in contrariis	in Phys. A 5, 188 a 27 l. 10, n. 3
in locis	Δ 1, 209 a 26, l. 2, n. 6
in generationibus	E 2, 225 b 34, l. 3, n. 13
in moventibus et motis	H 1, 242 a 15-243 a 2, l. 2
in moventibus per accidens	2, 243 b 18, l. 3, n. 6
in moventibus et motis	Θ 5, 256 a 4-257 a 33, l. 9
in partibus moventis seipsum	5, 258 a 9, l. 11, n. 2
in motu rectu	9, 265 a 20, l. 19, n. 6
in efficientibus	in Met. α 2, 994 a 20, l. 3, n. 303
in materiis	B 4, 999 a 32, l. 9, n. 450
in formis	999 b 10, l. 9, n. 452
in praedicatione entis	Γ 2, 1003 b 32, l. 2, n. 555
in nominibus	Z 5, 1030 b 30, l. 4, n. 1349
in essentiis	6, 1032 a 4, l. 5, n. 1376

En cambio, admite el proceso en infinito:

in divisione	in Phys. Z 1, 231 b 16, l. 1, n. 7
in affirmatione	in Met. Γ 8, 1012 b 14, l. 17, n. 743
in intellectu	Δ 9, 1018 a 5, l. 11, n. 912

bitur enim in subtrahendo eadem proportio, sed non eadem quantitas subtracti; minus est enim secundum quantitatem dimidium dimidii quam dimidium totius.

Sed si semper sumeret eamdem quantitatem, oporteret quod semper magis ac magis augeretur proportio. Puta si a quantitate decem cubitorum subtrahatur unus cubitus, subtractum se habet ad totum in subdecupla proportione: si autem iterum a residuo subtrahatur unus cubitus, subtractum se habebit in majori proportione; minus enim unus cubitus exceditur a novem quam a decem.

Sicut igitur servando eamdem proportionem diminuitur quantitas, ita sumendo eamdem quantitatem augetur proportio.

Si ergo aliquis sic subtrahendo ab aliqua magnitudine finita, semper augeat proportionem sumendo eamdem quantitatem, transibit dividendo magnitudinem finitam; puta si a linea centum cubitorum semper subtrahat unum cubitum. Et hoc ideo est, quia omne finitum consumitur quocumque finito accepto" (l. 10, n. 9).

Ambos infinitos convienen en esta mutua dependencia, pero existe entre ellos una diferencia característica que explica Santo Tomás con estas palabras:

"Infinitum per appositionem non excedit in majus omnem magnitudinem finitam.
sed Infinitum secundum divisionem excedit omnem determinatam parvitatem in minus.

Accipiamus enim aliquam determinatam parvitatem, puta unius digiti; si lineam centum cubitorum dividam in infinitum, accipiendo semper dimidium, venietur ad aliquid minus uno digito.

Sed apponendo in infinitum, e contrario divisioni, erit dare aliquam quantitatem finitam quae nunquam pertransibitur. Dentur enim duae magnitudines, quarum utraque sit decem cubitorum et tertia quae sit viginti. Si igitur id quod subtraho in infinitum, accipiendo semper dimi-

---

Nótese sobre todo el último texto, que tiene mucho interés:

"Non est autem possibile *in rebus* in infinitum procedere. *Sed in his quae sunt secundum intellectum* nihil prohibet. Nam cum intellectus reflectatur super suum actum, intelligit se intelligere. Et hoc ipsum potest etiam intelligere, et sic in infinitum".

Puede verse sobre esta cuestión: H. Dingler *Zum Problem des Regressus in infinitum*, en Philosophia Perennis II, p. 569-586.

dium ab una magnitudine decem cubitorum, addatur alteri quod etiam est decem cubitorum, numquam pervenietur in infinitum apponendo ad mensuram quantitatis, quae est viginti cubitorum: quia quantum remanebit in magnitudine cui subtrahitur, tantum deficiet a data mensura in quantitate cui addetur" [18] (206 b 18, 18-20, l. 10, n. 10).

Esta diferencia se explica razonadamente, comparando el todo con una forma y las partes con la materia. En el proceso de todo a partes no hay límite; pero sí en el proceso inverso.

"Hoc autem secundum rationem dicit accidere: quia cum infinitum habeat rationem materiae, continetur intus sicut materia: illud autem quod continet est species et forma.

Manifestum est ex hoc quod dictum est in secundo (l. 5, n. 8-9) quod totum habet rationem formae, partes autem rationem materiae.

Cum ergo in magnitudinibus a toto itur ad partes per divisiones, rationabile est quod ibi nullus terminus inveniatur, qui non transcendatur per infinitam divisionem.

Sed in additione itur a partibus ad totum, quod habet rationem formae continentis et terminantis: unde rationabile est quod sit aliqua determinata quantitas, quam infinita appositio non transcendat" (207 a 33-b 1, l. 12, n. 2).

Establezcamos ahora la comparación entre la magnitud y el número. En el número se encuentra término, descendiendo, pero no se encuentra ascendiendo. Lo primero se explica por la indivisibilidad de la unidad, a la que en último término se reduce todo número. Lo segundo por la división en infinito que admite el continuo.

"Et hujus rationem assignat; et primo quidem quare in numeris aliquis terminus invenitur qui in minus non transcenditur dividendo.

---

[18] De esta comparación deduce Santo Tomás una consecuencia muy importante.

"Dicit ergo primo quod ex quo appositio in infinitum non facit transcendere omnem determinatam quantitatem, non est possibile esse, nec etiam in potentia, quod excellatur omnis determinata quantitas per appositionem. Quia si esset in natura potentia ad appositionem transcendentem omnem quantitatem, sequeretur quod est actu infinitum; sic quod infinitum esset accidens alicui naturae, sicut naturales philosophi extra corpus hujus mundi quod videmus, ponunt quod est quoddam infinitum, cujus substantia est aer vel aliquid aliud hujusmodi.

Si ergo non est possibile esse corpus sensibile actu infinitum, ut ostensum est, sequitur quod non sit potentia in natura ad appositionem transcendentem omnem magnitudinem; sed solum ad appositionem infinitam per contrarium divisioni, ut dictum est" (206 b 20-27, l. 10, n. 11).

Hujus autem ratio est, quia omne unum, inquantum unum est indivisibile, sicut homo indivisibilis est unus homo et non multi.

Quemlibet autem numerum oportet resolvere in unum: quod patet ex ipsa ratione numeri. Numerus enim hoc significat, quod sint aliqua plura uno: quaelibet autem plura excedentia unum plus vel minus sunt determinatae species numerorum.

Unde cum unum sit de ratione numeri, et de ratione unius sit indivisibilitas, sequitur quod divisio numeri stet in termino indivisibili.

Deinde... assignat causam quare in numeris additio excedit omnem determinatam multitudinem.

Et dicit quod possumus semper intelligere quolibet numero dato alium majorem per hoc quod magnitudo dividitur in infinitum.

Manifestum est enim quod divisio causat multitudinem: unde quanto plus dividitur magnitudo, tanto major multitudo consurgit; et ideo ad infinitam divisionem magnitudinum sequitur infinita additio numerorum.

Et ideo sicut infinita divisio magnitudinis non est in actu sed in potentia, et excedit omne determinatum in minus, ut dictum est; ita additio numerorum infinita non est actu sed in potentia, et excedit omnem determinatam multitudinem" (l. 12, n. 3.4).

Naturalmente, este número que puede multiplicarse en infinito, por dividirse el continuo, es el número predicamental abstracto.

"Sed hic numerus qui sic in infinitum multiplicatur, non est numerus separatus a divisione magnitudinum.

Circa quod sciendum est quod divisio, ut dictum est multitudinem causat.

Est autem duplex divisio: una formalis, quae est per opposita: et alia secundum quantitatem.

Prima autem divisio causat multitudinem quae est de transcendentibus, secundum quod ens dividitur per unum et multa;

sed divisio continuae quantitatis causat numerum, qui est species quantitatis, inquantum habet rationem mensurae.

Et hic numerus multiplicabilis est in infinitum, sicut et magnitudo divisibilis est in infinitum:

sed multitudo quae sequitur divisionem formalem rerum, non multiplicatur in infinitum;

sunt enim determinatae species rerum, sicut et determinata quantitas universi.

Et ideo dicit quod hic numerus qui multiplicatur in infinitum, non separatur a divisione continui" (l. 12, n. 5).

Otra comparación podemos hacer entre dos infinitos de un mismo tipo; por ejemplo, entre el conjunto de números pares y el conjunto de todos los números naturales. DIRICHLET dice que ambos conjuntos son coordinables.

SANTO TOMÁS afirma claramente que el conjunto infinito de números naturales es mayor que el conjunto infinito de números pares solamente.

"Species numerorum parium sunt infinitae et similiter species numerorum imparium; et tamen numeri pares et impares sunt plures quam pares" (S. Th. 3, q. 10, a 3 ad 3).

Salvo este detalle y admitida la división también en infinito de la unidad pueden estas enseñanzas presentarse con decoro modernamente.

Esta es en efecto la doctrina que sostienen modernamente los matemáticos más eminentes.

Léase, por ejemplo, la conferencia sobre el Infinito que pronunció HILBERT para honrar la memoria de WEIERSTRASS (en *Grundlagen der Geometrie*, ed. 7, Leipzig, Teubner, 1930, Anhang VIII, p. 262-268).

Baste aquí indicar los puntos principales de contacto.

Reconoce que el continuo es el primer sujeto del infinito.

"Der erst naive Eindruck von der Naturgeschehen und der Materie ist der des Stetigen, des Kontinuierlichen" (p. 265).

Distingue bien un infinito real en el mundo y un infinito ideal en nuestro entendimiento.

"Die Endlichkeit des Wirklichen haben wir in zwei Richtungen festgestellt nach dem Unendlichkleinen und dem Unendlichgrossen. Dennoch könnte es sehr wohl zutreffen, dass das Unendliche *in unserem Denken* einen wohlberechtigen Platz hat und die Rolle eines unentbehrlichen Begriffes einnimmt" (p. 267).

Hace también claramente la distinción entre infinito actual e infi-

nito potencial, aunque el infinito actual que señala como ejemplo no responde a la concepción de ARISTÓTELES.

"In der Analysis haben wir es nur mit dem Unendlichkleinen und dem Unendlichgrossen als Limesbegriff, als etwas Werdendem, Entstehendem, Erzeugtem, d. h. wie man sagt, mit dem *potentiellen Unendlichen* zu tun.

Aber das eigentlich Unendliche selbst ist dies nicht. Dieses haben wir z. B., wenn wir die Gesamtheit der Zahlen 1, 2, 3, 4,... selbst als eine fertige Einheit betrachten oder die Punkte einer Strecke als eine Gesamtheit von Dingen ansehen, die fertig vorliegt. Diese Art des Unendlichen wird als *aktual Unendlich* bezeichnet" (p. 270).

Dice claramente que no existe el infinito ni realmente ni como un fundamento de nuestro conocimiento.

"Zuletz wollen wir über das Unendliche das Fazit aus allen unseren Überlegungen ziehen: Das Gesamtergebnis ist dann: das Unendliche findet sich nirgends realiziert; es ist weder in Natur vorhanden noch als Grundlage in unserem verstandesmässigen Denken zulässig — eine bemerkenswerte Harmonie zwischen Sein und Denken. In Gegensatz zu den früheren Bestrebungen von FREGE und DEDEKIND erlangen wir die Überzeugung, dass als Vorbedingung fur die Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis gewisse geometrisch-anschauliche Vorstellungen und Einsichten unentbehrlich sind und die Logik allein nicht ausreicht. Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur duch das Endliche gesichert werden" (p. 288).

CAPITULO VII

LOS AXIOMAS Y POSTULADOS

Hasta aquí he estudiado las primeras nociones de las Matemáticas.

Falta, para concluir el primer estadio, considerar los axiomas y postulados [1].

Claro que no puedo tratar esta cuestión en toda su amplitud, pues es un tema abundante que daría materia para otra disertación [2]. Debo, pues, reducirme a estudiar los Axiomas y los Postulados en las Matemáticas.

EUCLIDES consagró en sus *Elementos* la distinción entre *κοιναὶ ἔννοιαι* [3] y *αἰτήματα*.

Pero ARISTÓTELES estudió ya su fundamento filosófico. Da este criterio de distinción:

> *οὐκ ἔστι δ' ὑπόθεσις οὐδ' αἴτημα, ὃ ἀνάγκη εἶναι δι' αὐτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη. Οὐ γὰρ πρὸς τὸν ἔξω λόγον ἡ ἀπόδειξις, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν τῇ ψυχῇ, ἐπεὶ οὐδὲ συλλογισμός. Ἀεὶ γὰρ ἔστιν ἐνστῆναι πρὸς τὸν ἔξω λόγον, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἔσω λόγον οὐκ ἀεί* (An. Post. A 10, 76 b 23-27).

SANTO TOMÁS explica cuidadosamente todos los miembros de esta argumentación.

---

[1] Véase la nota (1) del capítulo II.

[2] Algo ha hecho en este sentido WILLENS en su artículo *Die obersten Seins und Denkgesetze nach Aristoteles und dem heil. Thomas, v. A.*, Phil. Jahrb. 14 (1901) 287-297; 15 (1902) 30-39; 150-160.

[3] Véase la nota (16) capítulo I.

"Petitio et suppositio exteriori ratione confirmari possunt, idest argumentatione aliqua.

Sed communis animi conceptio [4] non est ad exterius rationem, quia non potest probari per aliquam argumentationem, sed est ad eam quae est in anima quia lumine naturalis rationis statim fit nota.

Et quod non sit ad exterius rationem patet, quia non fit syllogismus ad probandas hujusmodi communes animi conceptiones.

Et quod hujusmodi non sunt notae per exteriorem rationem, sed per interiorem probat per hoc quod exteriori rationi potest instari vel vere vel apparenter: interiori autem rationi non est possibile semper instari.

Et hoc ideo, quia nihil est adeo verum, quin voce possit negari.

Nam et hoc principium notissimum quod non contingat idem esse et non esse, quidam ore negaverunt.

Quaedam autem adeo vera sunt, quod eorum opposita capi non possunt; et ideo interiori ratione eis obviari non potest, sed solum exteriori quae est per vocem. Et hujusmodi sunt communes animi conceptiones" (in 1. c. l. 19, n. 3).

Unas líneas antes había expresado Santo Tomás esta distinción en otra forma más clara:

"Communes animi conceptiones habent aliquid commune cum aliis principiis demonstrationis, et aliquid proprium.

Commune quidem habent, quia necesse est tam ista quam alia principia per se esse vera.

Proprium autem est horum principiorum quod non solum necesse est ea per se vera esse, sed etiam necesse est videri quod per se sint vera. Nullus enim potest opinari contraria eorum" (in 1. c. l. 19, n. 2).

Dada la doctrina fundamental que expuse en el Capítulo I, se puede señalar otra distinción entre axiomas y postulados.

Como observa Cayetano [5] "suponer" tiene dos acepciones:
una, impropia, opuesta a investigar y demostrar,
otra, propia, opuesta a proponer con evidencia.

Los axiomas son suposiciones sólo en la primera acepción.

Los postulados son suposiciones en ambos sentidos.

Otra distinción hace Aristóteles entre los principios de una ciencia que podría equipararse a la distinción entre axiomas y postulados.

---

[4] Traducción literal del *κοιναὶ ἔννοιαι* usada también por Boecio en su traducción de Euclides (PL 63, 1311).

[5] in Anal. Post. ed. *Venetiis*, 1554, f. 53v-54.

αἱ γὰρ ἀρχαὶ διτταί, ἐξ ὧν τε καὶ περὶ δ·
αἱ μὲν οὖν ἐξ ὧν κοιναί,
αἱ δὲ περὶ δ ἴδιαι, οἷον ἀριθμός, μέγεθος (An. Post. A 32, 88 b 27-29, l. 43, n. 13).

Una de estas diferencias existe ciertamente en los *Elementos* de EUCLIDES.

Los *αἰτήματα* son ciertamente propios.

Las *κοιναὶ ἔννοιαι*, como su nombre lo indica, comunes.

Pero la otra no les conviene claramente.

No solamente los axiomas sino también los postulados son *ἐξ ὧν*.

Sólo las definiciones podrían decirse *περὶ δ*.

Vistas las diferencias principales que señalan ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS entre los axiomas y postulados, se puede recoger en particular lo que de cada grupo dijeron, siempre con respecto a las Matemáticas.

Llama ARISTÓTELES su tratado de los axiomas *περὶ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι* [6] *καλουμένων ἀξιωμάτων* (Met. Γ 3, 1005 a 20).

SANTO TOMÁS justifica esta denominación por la mayor certeza y más frecuente uso de estos principios en las demostraciones matemáticas.

"Appropriat autem ista principia magis mathematicis scientiis, quia certiores demonstrationes habent et manifestius istis principiis per se notis utuntur, omnes suas demonstrationes ad haec principia resolventes" (in l. c. l. 5, n. 588).

Doce líneas más abajo vuelve ARISTÓTELES a subrayar este primado de los axiomas en Matemáticas, pues al decir que ninguna ciencia especial los considera, dice expresamente:

οὔτε γεωμέτρης οὔτ' ἀριθμετικός (1005 a 31).

"qui tamen istis principiis plurimum utuntur", como advierte SANTO TOMÁS (n. 592) [7].

Una característica importante que distingue los axiomas matemáticos de los axiomas de otras ciencias es su certeza absoluta.

Varias veces subraya SANTO TOMÁS esta diferencia casi con idénticas palabras:

---

[6] W. D. ROSS (*Aristotle's Metaphysics*, Oxford, 1924, I, p. 261), traduce *μαθήμασι* por mathematics.

[7] Puede observarse también este detalle. Casi siempre que SANTO TOMÁS pone un ejemplo de axioma, usa éste: "El todo es mayor que la parte" que tiene una aplicación principal en las Matemáticas.

"Principia (scientiarum)

aut sunt certiora quoad nos, sicut in naturalibus, quia sunt propinquiora sensibus,
aut simpliciora et priora secundum naturam, sicut est in mathematicis" (in Met. E 1, 1025 b 7, l. 1, n. 1146).

"In quibusdam autem eadem sunt notiora quoad nos et secundum naturam, sicut in mathematicis, quae sunt a materia abstracta...

in quibusdam vero non sunt eadem magis nota simpliciter et quoad nos, scilicet in naturalibus..." (in De An. B 2, 413 a 12, l. 3, n. 245).

"Quandoque autem id quod est magis notum quoad nos, est etiam magis notum simpliciter et secundum naturam, sicut accidit in mathematicis...

Item quandoque id quod est notius quoad nos, non est notius simpliciter sicut accidit in naturalibus..." (in An. Post. A 2, 71 b 34, l. 4, n. 16).

Sobre el origen de los primeros principios habla SANTO TOMÁS en muchos lugares de sus obras [8]. Aquí sólo notaré lo que dice en especial de los principios matemáticos.

Distingue diversas maneras de manifestar un principio y señala la inducción como la manera propia de manifestar los principios matemáticos.

"Ipsa autem principia non eodem modo manifestantur.

Sed quaedam considerantur inductione, quae est ex particularibus imaginariis, utputa quod omnis numerus est par aut impar.

Quaedam vero accipiuntur sensu, sicut in naturalibus, puta quod omne quod vivit indiget nutrimento.

Quaedam vero consuetudine, sicut in moralibus, utpote quod concupiscentiae diminuuntur si eis non obediamus.

Et alia etiam principia aliter manifestantur; sicut in artibus operativis accipiuntur principia per experientiam quandam" (in Eth. Nic. A 7, 1078 b 1, l. 11, n. 137).

---

[8] Trata expresamente (in An. Post. B 19, 99 b 17-100 ab 18, l. 25).

Otros muchos lugares pueden verse en el artículo del P. HOENEN *De origine primorum principiorum scientiae*, Gregorianum, 14 (1933), 153-184.

En otro lugar hace resaltar expresamente esta idea para las Matemáticas.

"Sed maxime hoc (sc. ex singularibus accipere universalem) videtur dubium in his quae dicuntur secundum abstractionem, sicut in mathematicis.

Cum enim experientia a sensu ortum habeat, ut dicitur in principio Metaphysicae (A 1, 981 a 3; l. 1, n. 18), videtur quod hoc locum non habeat in his, quae sunt abstracta a materia sensibili.

Et ideo, ad hoc excludendum dicit quod etiam ea, quae dicuntur secundum abstractionem, contingit nota facere per inductionem; quia in unoquoque genere abstractorum sunt quaedam particularia, quae non sunt separabilia a materia sensibili, secundum quod unumquodque eorum est hoc.

Quamvis enim linea secundum abstractionem dicatur, tamen haec linea, quae est in materia sensibili inquantum est individuata abstrahi non potest, quia individuatio ejus est ex hac materia.

Non autem manifestantur nobis principia abstractorum, ex quibus demonstrationes in eis procedunt, nisi ex particularibus aliquibus quae sensu percipimus.

Puta ex hoc, quod videmus aliquod totum singulare sensibile perducimur ad cognoscendum quid est totum et quid est pars, et cognoscimus quod omne totum est majus sua parte, considerando hoc in pluribus.

Sic igitur universalia, ex quibus demonstratio procedit, non fiunt nobis nota, nisi per inductionem" (in An. Post. A 18, 81 b 3, l. 30, n. 5).

Cuando explica Aristóteles el uso de los primeros principios en las diversas ciencias [9], ilustra siempre sus doctrinas con ejemplos matemáticos.

Dice que los principios y las conclusiones convienen en que se supone la significación; pero se diferencian en que los principios se suponen valederos y las conclusiones se deben demostrar.

Pone este ejemplo matemático: en Aritmética se supone la significación de la unidad (principio), del recto, del triángulo (propiedades), pero

se supone la existencia de los principios y
se demuestra la existencia de las propiedades.

[9] An. Post. A 9-10, 76 a 26-b 22 Santo Tomás l. 18.

Distingue los principios comunes de los propios.

Pone como ejemplo de principios propios las definiciones de línea y de recto pues, como nota SANTO TOMÁS, "tam subjecti quam passionis definitio in scientiis pro principio habetur" (n. 7).

Como ejemplo de principio común pone uno de los que usa también EUCLIDES [10]: ἴσα ἀπὸ ἴσων ἂν ἀφέλῃ, ὅτι ἴσα τὰ λειπά. (76 a 4).

Pero advierte que estos principios comunes deben tomarse proporcionalmente en cada ciencia. Por ejemplo, el aritmético ceñirá este principio a los números; el geómetra a las magnitudes.

Sobre los Postulados son mucho menos explícitos ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS.

Dicen que muy bien puede darse que una ciencia postule lo que otra demuestra. Pone SANTO TOMÁS un ejemplo matemático: la existencia de la línea recta.

"Sunt enim quaedam propositiones quae non possunt probari nisi per principia alterius scientiae, et ideo oportet quod in illa scientia supponantur, licet probentur per principia alterius scientiae.

Sicut a puncto ad punctum rectam lineam ducere supponit geometra et probat naturalis, ostendens quod inter quaelibet duo puncta sit linea media" (in An. Post. A 2, 72 a 15, l. 5. n. 7).

Distinguen dos tipos de postulados:

Unos que no se afirman ni se niegan.
Otros que se afirman o se niegan.

Los primeros se llaman definiciones.
Los segundos son las hipótesis.
Ponen como de costumbre un ejemplo matemático.

"Subdividit alterum membrum primae divisionis, scilicet *positionem*: dicens quod:

quaedam positio est, quae accipit aliquam partem enunciationis, scilicet affirmationem vel negationem: quod significat cum dicit: *ut dico aliquid esse vel non esse.* Et haec positio suppositio dicitur, quia tamquam veritatem habens supponitur.

Alia autem positio est, quae non significat esse vel non esse, sicut definitio quae *positio* dicitur.

[10] EUCLIDES *Elementa*, I, ed. *Heiberg*, p. 10, 4.

Ponitur enim ab arithmetico definitio unitatis tamquam quoddam principium scilicet quod unitas est *indivisibile secundum quantitatem*. Sed tamen definitio non dicitur suppositio: illud enim proprie supponitur, quod verum vel falsum significat. Et ideo subdit quod non idem est quod *quid est unitas* quod neque verum neque falsum significat et *esse unitatem* quod significat verum vel falsum" (in An. Post. A 2, 72 a 18, l. 5, n. 8).

Sobre las definiciones hablaré en el capítulo siguiente.

Sobre lo que aquí llama hipótesis baste recordar que no debe tomarse esta palabra en un sentido peyorativo, sino únicamente en un sentido amplio, opuesto a conclusiones demostradas.

Esta doctrina de los Axiomas y Postulados de las Matemáticas en Santo Tomás es bastante completa, si se considera que nunca trató de propósito esta cuestión; pero absolutamente es muy incompleta.

Faltan absolutamente, por ejemplo, dos cuestiones que hoy preocupan a los matemáticos, sobre todo de la escuela axiomática como Hilbert, a saber

la suficiencia y

la independencia.

Falta una consideración epistemológica del valor de los Postulados.

En cambio hay dos cosas importantes que son poco tratadas por los modernos y que Santo Tomás estudió suficientemente:

la distinción entre Axiomas y Postulados, y luego

la investigación sobre el origen de los Axiomas.

CAPITULO VIII

LAS NOCIONES DERIVADAS. LAS DEFINICIONES

El segundo estadio abarca las nociones derivadas. "(Primis notionibus) suppositis, per demonstrationem quaeruntur quaedam alia", dice SANTO TOMÁS en el texto ordenador de esta disertación.

Primeramente, pues, hay que estudiar en qué consisten estas nociones derivadas, cómo se entienden sus definiciones.

Luego hay que estudiar las demostraciones que introducen en las Matemáticas estas nuevas nociones, o sea en qué consiste la existencia matemática.

Dada solución al problema anterior, surge en seguida otro muy interesante: la existencia de las matemáticas en el mundo real.

Estas tres cuestiones llenarán este estadio característico de las Matemáticas.

Este capítulo comprende sólo la primera cuestión.

Las definiciones de EUCLIDES se pueden clasificar en tres grupos.

Unas describen, más o menos exactamente, las primeras nociones, como punto, línea, superficie.

Otras definen nociones nuevas que se originan por combinación de las primitivas. Tales son, por ejemplo, las definiciones de ángulo, de figura, de círculo, de paralelas, etc.

Otras, por fin, son simplemente explicaciones de palabras. Agudo por ejemplo quiere decir menor que recto; triángulo la figura de tres lados, etc.

Estos tres tipos de definiciones que se notan en EUCLIDES corres-

ponden con ligeras variantes a los tres géneros de definiciones que distinguió ARISTÓTELES con respecto a la demostración.

"Triplex est genus definitionis per comparationem ad demonstrationem.

Quaedam enim est definitio, quae est indemonstrabilis ratio ejus quod quid est; et haec est illa, quam dixerat esse immediatorum.

Alia vero est definitio, quae est quasi quidam syllogismus demonstrativus ejus quod quid est; et non differt a demonstratione nisi *situ*, idest secundum diversam acceptionem et positionem dictionum; ut cum dicitur, tonitruum est sonus exstincti ignis in nubibus [1].

Tertia autem est definitio, quae est solum significativa ipsius quod quid est, et est conclusio demonstrationis" (in An. Post. B 10, 94 a 11, l. 8, n. 10).

El primer grupo de definiciones corresponde al primer estadio que ha quedado suficientemente tratado en los capítulos anteriores.

El segundo grupo es el característico del segundo estadio.

El tercero es simplemente una comodidad del lenguaje científico.

La estructura misma de las palabras indica muchas veces el carácter nominal de las definiciones del tercer grupo. Véase, por ejemplo, la primera de este tipo que ocurre en EUCLIDES.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία (l. 1, def. IX, ed. HEIBERG, p. 2, 14-15).

Pero también las definiciones del segundo grupo, aunque gramaticalmente no tengan este sentido, deben considerarse lógicamente como definiciones puramente nominales, que sirven para investigar si existen o no las nociones correspondientes.

Así lo observan varias veces ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS, usando, como de costumbre en los libros lógicos, muchos ejemplos matemáticos.

"Alia vero sunt de quibus oportet praeintelligere *quid est quod dicitur* idest quid significatur per nomen, scilicet de passionibus. Et non dicit quid est simpliciter, sed *quid est quod dicitur*, quia antequam sciatur de aliquo an sit, non potest sciri proprie de eo quid sit: non entium enim non sunt definitiones.

---

[1] Como ejemplo matemático de este tipo de definiciones puede darse la que da EUCLIDES del ángulo recto.

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν (l. 1, def. X ed. *Hieberg*, p. 2, 16-4, 3).

Unde quaestio *an est*, praecedit quaestionem *quid est*. Sed non potest ostendi de aliquo an sit, nisi prius intelligatur quid significatur per nomen" (in An. Post. A 1, 71 a 13, l. 2, n. 5).

Ponen el ejemplo matemático típico, correspondiente a la primera proposición de EUCLIDES.

"Geometra enim accipit quid significat hoc nomen *triangulus et* demonstrat *quod sit*, puta cum demonstrat super lineam rectam datam triangulum aequilaterum constituere" (in An. Post. B 7, 92 b 15, l. 6, n. 4).

Y confirman su doctrina con las definiciones vulgares que corren, señalando otra vez en particular un ejemplo matemático.

"...dicit manifestum esse non solum secundum praedicta, sed etiam secundum modos *terminorum;* idest definitionum quae nunc sunt in usu, quod illi qui definiunt non manifestant quia est.

Puta qui definit circulum dicens quod est aliquid ex cujus medio lineae ad circumferentiam ductae sunt aequales, adhuc restat quaestio propter quid oporteat poni esse id quod definitur, puta propter quid oporteat poni quod sit circulus, qui praedicto modo definitur..." (in An. Post. B 7, 92 b 19, l. 6, n. 5).

Esta es la razón por qué, según quedó expuesto en el capítulo anterior, las definiciones se llaman también posiciones o postulados. Las definiciones son la base de las demostraciones.

"Quia enim demonstrationes definitiones praesupponunt, ex quibus concludunt, merito dicuntur *positiones*" (in De int. 1, 16 a 1, l. 1, n. 4).

Las definiciones matemáticas se distinguen de las naturales por el grado de abstracción.

Las definiciones naturales comprenden la materia y la forma;
las definiciones matemáticas únicamente la forma.

"Definitio autem substantiarum naturalium non tantum formam sed et materiam continet: aliter enim definitiones naturales et mathematicae non differrent" (De ente et es, cap. 2) [3].

---

[3] Habla también de estas dos clases de definiciones

in de An. A I, 403 b 17, 1.2, n. 29

Dice en este lugar:
"Notandum est quod tota ratio divisionis philosophiae sumitur secundum definitionem et modum definiendi".

Por eso las definiciones matemáticas responden a la causa formal y sirven de fundamento a las demostraciones rigurosas (*διότι*) de las Matemáticas.

"...Propter quid tot est secundum numerum, quot sunt causae praedictae.

Quandoque enim propter quid reducitur ultimo in quod quid est, idest in definitionem, ut patet in omnibus immobilibus, sicut sunt mathematica; in quibus propter quid reducitur ad definitionem recti vel commensurati vel alicujus alterius quod demonstratur in mathematicis.

Cum enim definitio recti anguli sit quod constituatur ex linea super aliam cadente, quae ex utraque parte faciat duos angulos aequales; si quaeratur propter quid iste angulus sit rectus, respondetur quia constituitur ex linea faciente duos angulos aequales ex utraque parte; et ita est in aliis.

Quandoque vero reducitur propter quid in primum movens..." (in Phys. B 7, 198 a 17, l. 10, n. 14).

Pero no juegan el mismo papel en una demostración las definiciones del sujeto y de una propiedad, como observa cuidadosamente Santo Tomás. Siempre tiene la preferencia la definición del sujeto.

"Videtur hic Aristotelem dicere quod definitio passionis sit medium in demonstratione.

Sed considerandum est quod definitio passionis perfici non potest sine definitione subjecti.

Manifestum est enim quod principia, quae continet definitio subjecti, sunt principia passionis. Non ergo demonstratio resolvet in primam causam, nisi accipiatur ut medium demonstrationis definitio subjecti.

Sic igitur oportet concludere passionem de subjecto per definitionem passionis, et ulterius definitionem passionis concludere de subjecto per definitionem subjecti.

Unde et in principio dictum est quod oportet praecognoscere *quid est* non solum de passione sed etiam de subjecto: quod non oporteret nisi definitio passionis concluderetur de subjecto per definitionem subjecti.

Et hoc patet per exemplum.

Si velimus de triangulo demonstrare quod habet tres angulos aequales duobus rectis, accipiamus primo pro medio quod est figura habens angulum extrinsecum aequalem duobus intrinsecis sibi oppositis, quod

est quasi definitio passionis. Quod iterum demonstrare oportet per definitionem subjecti. Ut dicamus: Omnis figura tribus rectis lineis contenta habet angulum exteriorem aequalem duobus interioribus sibi oppositis; sed triangulus est hujusmodi: ergo etc." (in An. Post. B 1, 90 a 23, l. 11, n. 9).

Para terminar esta exposición de la doctrina de SANTO TOMÁS sobre las definiciones matemáticas, conviene recoger aquí un detalle curioso sobre la precisión de los términos filosóficos.

Dicen las reglas de la Lógica que la definición debe constar de género próximo y diferencia específica. Pero, como advierte ARISTÓTELES en su famoso vocabulario filosófico que forma parte de los Metafísicos, "género" no es unívoco y precisamente en las definiciones matemáticas adquiere una significación especial: la de sujeto propio.

Véase cómo lo explica SANTO TOMÁS:

"Tertio modo dicitur genus, sicut superficies est genus figurarum superficialium, 'et solidum', idest corpus, dicitur esse genus figurarum solidarum, idest corporearum.

Genus autem hoc non est quod significat essentiam speciei, sicut animal est genus hominis; sed quod est proprium subjectum, specie differentium accidentium. Superficies enim est subjectum omnium figurarum superficialium.

Et habet similitudinem cum genere; quia proprium subjectum ponitur in definitione accidentis, sicut genus in definitione speciei. Unde subjectum proprium de accidente praedicatur ad similitudinem generis. 'Unaquaeque enim figurarum haec quidem', idest superficies est talis superficies. 'Hoc autem' idest figura solida, est tale solidum, ac si figura sit differentia qualificans superficiem vel solidum.

Superficies enim se habet ad figuras superficiales, et solidum ad solidas sicut genus quod subjicitur contrariis. Nam differentia praedicatur in eo quod quale. Et propter hoc, sicut cum dicitur animal rationale significatur tale animal, ita cum dicitur superficies quadrata, significatur talis superficies" (in Met. Δ 28, 1024 a 36, l. 22, n. 1121).

Esto es todo lo que he podido encontrar en SANTO TOMÁS sobre las nociones derivadas y las definiciones matemáticas.

Creo que el problema principal de esta cuestión es el origen de estas nociones derivadas.

Para investigar si existe o no un triángulo, debemos saber qué significa esta palabra: ¿Cómo llegamos a conocer esta significación?

SANTO TOMÁS no consideró este problema.

Los modernos lo han considerado; pero tal vez no le han dado todavía una solución completa [1].

Hoelder, por ejemplo, sólo dice en general que se deben estas nociones derivadas a una actividad de nuestro entendimiento.

"Von wesentlich anderer Art als die der Erfahrung oder Anschauung entsprungenen Begriffe sind diejenigen, die wir vermöge unserer eigenen Verstandestätigkeit bilden" (*Die mathematische Methode*, Berlin, Springer, 1924, p. 254).

C. I. Lewis dice casi lo mismo, aunque en sentido logístico.

"Mathematics in any set of strings of recognizable marks in which some of the strings are taken initially and the remainder derived from these by operations performed according to ruler which are independent of any meaning assigned to the marks" (*A Survey of symbolic Logic*, Berkeley, 1918, p. 355).

Una idea cabal de lo que representan estas ideas derivadas en las matemáticas la tendremos tal vez al estudiar las demostraciones que las introducen.

---

[1] W. Duvislav en su monografía *Die Definition* (Leipzig, Meiner, 1931) sólo accidentalmente trata esta cuestión en una nota que copia de Lewis.

Tiene, en cambio, un artículo expreso sobre esta cuestión, pero sin tratar el punto principal que nos ocupa. *Zur Lehre von den sog. schöpferischen Definitionen* Phil. Jahrb. 41 (1928) 467-479; 42 (1929) 42-53.

CAPITULO IX

LOS TEOREMAS CONSTRUCTIVOS. LA EXISTENCIA MATEMATICA

Dadas las definiciones de los conceptos derivados, "adhuc restat quaestio propter quid oporteat poni id quod definitur" (in An. Post. B 7, 92 b 19, l. 6, n. 5).

Los matemáticos resuelven esta cuestión.

Euclides, por ejemplo, construye en su primer libro el triángulo equilátero y el cuadrado [1].

La construcción del cuadrado se funda en cinco proposiciones demostradas; en dos axiomas fundamentales y el famoso postulado quinto.

Sobre el punto A de la línea AB constrúyase una perpendicular, según se enseña en la prop. XI.

Tómese AD = AB, según se enseña en la prop. II.
Por el punto D constrúyase una paralela a la línea AB } prop. XXXI
Por el punto B constrúyase una paralela a la línea AD } prop. XXXI
Tenemos, pues, el paralelogramo ABDE.

AB = DE } por la prop. XXXIV
AD = BE } por la prop. XXXIV
AB = AD por construcción

[1] Proposiciones I y XLVI respectivamente (ed. Heiberg, p. 10 y 103 resp.). Son precisamente los dos ejemplos concretos que señala Santo Tomás al explicar este segundo estudio.

luego AB = AD = DE = BE por el axioma primero:
luego ABDE es equilátero.

$$BAD + ADE = 2\,R \quad \text{según la prop. XXIX}$$
$$BAD = R \quad \text{por construcción}$$
luego $ADE = R$ por el axioma tercero.

$$\left.\begin{array}{l} ABE = ADE \\ BED = BAD \end{array}\right\} \text{por la prop. XXXIV}$$

luego

$$BAD = ADE = ABE = RED = R$$

luego ABDE es también rectángulo:
luego ABDE es un cuadrado según la definición XXII.

¿Qué debe hacer el filósofo ante estas demostraciones?
Primeramente revisarlas; luego estudiar su resultado.
La demostración de EUCLIDES es rigurosa.

El resultado es éste: no solamente sabemos lo que significa "cuadrado" como podemos saber lo que quiere decir "trapezoide equilátero", sino que hemos demostrado rigurosamente su existencia en el mundo matemático.

¿Qué es esta existencia matemática? Esta es la cuestión principal de este capítulo.

ARISTÓTELES la estudió detenidamente en el libro M de los Metafísicos que no llegó a comentar SANTO TOMÁS.

Ἀνάγκη δ' εἴπερ ἔστι τὰ μαθηματικά,
ἢ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς εἶναι αὐτὰ καθά λέγουσί τινες [2],
ἢ κεχωρισμένα τῶν αἰσθητῶν (λέγουσι δὲ καὶ οὕτω τινές) [3]
ἢ εἰ μηδετέρως, ἢ οὐκ εἰσίν,
ἢ ἄλλον τρόπον εἰσίν·
ὥσθ' ἡ ἀμφισβήτεσις ἡμῖν ἔσται οὐ περὶ τοῦ εἶναι
ἀλλὰ περὶ τοῦ τρόπου (Met. M. 1, 1076 a 32-37).

La doctrina de ARISTÓTELES en este lugar [4] se puede resumir en tres proposiciones [5].

---

[2] No se puede decir con precisión quienes defendieron esta sentencia, según dice W. D. ROSS (*Aristotle's Metaphysics*, Oxford 1924, II, p. 412).

[3] Esta es la opinión de PLATÓN y PSEZEUSIPPO.
Habla de esta opinión SANTO TOMÁS in Phys. B 1.3, n. 6
Met. A 6, 987 b 14-18, 1.10, n. 157
H 1, 1042 a 12, 1.1, n. 1683

[4] Met. M 2-3, 1076 a 38-1078 b 6.

[5] Así lo resumen W. D. ROSS *Aristotle's Metaphysics*, Oxford 1924, II p. 418.

Las nociones matemáticas no existen actualmente dentro de los cuerpos sensibles.

Pero tampoco existen separadas y solas, como quería PLATÓN.

Existen sólo potencialmente en las cosas sensibles y reciben la existencia actual por el acto del matemático que considera sólo una propiedad de las cosas, sin considerar las demás que realmente integran el ser.

ἐπὶ τῶν κινουμένων ἔσονται λόγοι καὶ ἐπιστῆμαι,
οὐχ ᾗ κινούμενα δὲ
ἀλλ' ᾗ σώματα μόνον

καὶ πάλιν ᾗ ἐπίπεδα μόνον
καὶ ᾗ μήκη μόνον
καὶ ᾗ διαιρετὰ
καὶ ᾗ ἀδιαιρετὰ
καὶ ᾗ ἀδιαιρετὰ ἔχοντα δὲ θέσιν
καὶ ᾗ ἀδιαιρετὰ μόνον (Met. M 3, 1077 b 27-30).

SANTO TOMÁS conocía bien esta solución de ARISTÓTELES, según es de ver en estas palabras que escribió, después de presentar las *ἀπορίαι* del libro B de los Metafísicos.

"Has autem quaestiones pertractat Philosophus infra, duodecimo, tertiodecimo et quartodecimo hujus, ostendens non esse mathematicas substantias separatas, nec etiam species.

Et ratio quae movebat ponentes mathematica et species sumpta ab abstractione intellectum solvitur in principio tertiidecimi.

Nihil enim prohibet aliquid quod est tale, salva veritate considerari ab intellectu non inquantum tale; sicut homo albus potest considerari non inquantum albus; et hoc modo intellectus potest considerare res sensibiles, non inquantum mobiles et materiales, sed inquantum sunt quaedam substantiae vel magnitudines; et hoc est intellectum abstrahere a materia et motu.

Non autem sic abstrahit intellectus secundum, quod intellegat magnitudines et species esse sine motu. Sic enim sequeretur quod vel esset falsitas intellectus abstrahentis, vel quod ea quae intellectus abstrahit, sint separata secundum rem" (in Met. B 9, 998 a 20, l. 7, n. 422) [6 b].

H. BONITZ *Aristotelis Metaphysica* Bonnae 1849, II p. 528.

[bis] Otras muchas veces habla SANTO TOMÁS de esta solución de ARISTÓTELES.

Véanse por ejemplo, in Met. Procemium.

Esta solución, en rigor, se reduce sólo a la existencia de los conceptos que se obtienen por abstracción; pero otro pasaje de los Metafísicos exige extender esta solución a todas las ideas matemáticas.

Todos los conceptos matemáticos existen potencialmente, hasta que una actividad intelectual los haga actuales.

El pasaje referido es un poco difícil [*] y requiere un detenido análisis.

εὑρίσκεται δὲ καὶ διαγράμματα ἐνεργείᾳ: διαιροῦντες γὰρ εὑρίσκουσιν. εἰ δ' ἦν διῃρημένα, φανερὰ ἂν ἦν: νῦν δ' ἐνυπάρχει δυνάμει (Met. Θ 9, 1051 a 21-24).

Primeramente, ¿qué significa aquí ***διαγράμματα***?

Santo Tomás dice: " 'diagrammata', idest descriptiones Geometriae" (n. 1888).

H. Bonitz a) en su comentario interpreta "propositionum mathematicarum demonstrationes" (II, p. 407).

b) en su *Index* pone simplemente "figura geometrica" y cita expresamente este paso (178 a 9).

W. D. Ross se inclina también a esta traducción ordinaria de la palabra, aunque advierte muy oportunamente que "To make the construction intelligently, however, is to see the proof, and Aristotle at once passes to this (***δῆλον διά τι***, 1051 a 26)" (II, p. 468).

Podemos, pues, entender muy bien ***διαγράμματα*** del caso que nos ocupa, o sea de los teoremas constructivos, aunque los dos ejemplos que aduce después Aristóteles sean ambos teoremas deductivos.

El comentario de Santo Tomás parece favorecer esta interpretación, pues dice: " 'inveniuntur', idest per inventionem cognoscuntur" (n. 1888).

E 1, 1026 a 15, 1.1, n. 1162
Z 1, 1028 b 32, 1.1, n. 1269
H 1, 1042 a 25, 1.1, n. 1685
K 1, 1059 b 10, 1.1, n. 2162

[*] W. D. Ross dice de este pasaje:

"In the attempt to interpret this difficult passage I owe much to the late Professor Cook Wilson, who discuses it with me" (II, p. 268).

H. Bonitz dice de las últimas palabras del texto:

"His verbis quid dicat Ar. plene perspicere non possum" (II, p/408).

¿Qué significa *ἐνεργείᾳ*?

Santo Tomás dice: "secundum dispositionem figuram in actu" (n. 1888).

H. Bonitz: "lineae... alia., quae potentia insunt figurae, actu ducamus iisque secemus (*διαιροῦτες*) figuram" (II, p. 407).

Pero la interpretación más acertada parece ser la de W. D. Ross. *ἐνεργείᾳ* es una actividad del entendimiento (*νόησις*), como explica Aristóteles más abajo.

" 'Geometrical constructions are discovered by an activity: for we find them by dividing'. The activity is later (l. 30) described as *νόησις* and this may seem inconsistent with the description of it as division. But it is not really so, for division here does not mean the drawing of lines with chalk or pen but the apprehension that the geometrical figures with which we are dealing are divisible in certain ways. The geometer is dealing with figures which are *νοητά* (Z 1036 a 3) and his essential activity is *νόησις*, not the construction of anything *αἰσθητόν*; the latter is merely an aid to the former". *Aristotle's Metaphysics*, II, p. 269.

En la realidad ambas sentencias se confunden; porque la *νόησις* no se efectuará, si en la imaginación al menos no trazamos alguna línea, o sea, reducimos al acto lo que estaba en potencia.

Santo Tomás interpreta *διαιροῦντες*: "dividendo lineas et superficies"; pero en el primer ejemplo de Aristóteles no se divide ninguna línea, ni superficie determinada, sino sólo el espacio que rodea el triángulo. En este sentido también los teoremas constructivos *διαιροῦντες εὑρίσκουσιν*.

Dos son los ejemplos que aduce Aristóteles para confirmar la doctrina que enseña: su ejemplo favorito la suma de los ángulos de un triángulo y el valor del ángulo construído en un semicírculo [6 b].

Termina con estas interesantes palabras:

[6 bis] Como observa W. D. Ross (II, p/270) el primer teorema concuerda con la forma euclidea (I, p. 32 et. Heibero p. 76).

En cambio, la demostración del segundo ejemplo no concuerda con la demostración de Euclides (III, p. 31, ed. Heibero p. 240).

Basten estas breves indicaciones, para confirmar la necesidad de un estudio sobre la influencia de Aristóteles en Euclides, que a otro propósito señalé en el capítulo primero (nota 2).

ὥστε φανερὸν ὅτι τὰ δυνάμει ὄντα εἰς ἐνέργειαν ἀγόμενα εὑρίσκεται: αἴτιον δὲ ὅτι ἡ νόησις ἐνέργεια: ὥστ' ἐξ ἐνεργείας ἡ δυνάμις καὶ διὰ τοῦτο ποιοῦντες γιγνώσκουσιν (ὕστερον γὰρ γενέσει ἡ ἐνέργεια ἡ κατ ἀριθμὸν) (Met. Θ 9, 1051 a 29-33).

Santo Tomás comenta este paso de un modo muy impreciso:

"Sic igitur concludit philosophus manifestum esse quod quando aliqua reducuntur de potentia in actum tunc invenitur eorum veritas.

Et hujus causa est quia intellectus actus est. Et ideo ea quae intelliguntur, oportet esse actu.

Propter quod ex actu cognoscitur potentia. Unde facientes aliquid actu cognoscunt, sicut patet in praedictis descriptionibus.

Oportet enim quod in eodem secundum numerum, posterius secundum ordinem generationis et temporis sit actus quam potentia, ut supra expositum est" (in l. c. l. 10, n. 1894).

Creo que según el principio general de Aristóteles: *ἐκ τοῦ δυνάμει ὄντος γίγνεται τὸ ἐνεργείᾳ ὂν ὑπὸ ἐνεργίᾳ ὄντος* (Met. 9, 1049 b 24), este pasaje debe interpretarse así: las nociones matemáticas que existen en potencia son reducidas al acto por la actividad del entendimiento.

En conclusión. La existencia matemática de una noción podemos considerarla en dos fases:

potencial, objetivamente consiste en una posibilidad,
actual y subjetivamente consiste en una percepción
- por intuición
- por abstracción
- por demostración.

Reduciendo ambas fases, podemos decir simplemente que la existencia matemática consiste en una posibilidad percibida; y, al contrario, la no-existencia matemática en una imposibilidad percibida.

Unos ejemplos ilustrarán esta concepción.

Existe un continuo de tres dimensiones, porque es posible abstraer esta noción de los cuerpos físicos.

Existen triángulos equiláteros, porque demostramos su posibilidad.

No existen triángulos equiláteros rectángulos, porque vemos su imposibilidad.

Pero, por reducirse la existencia a estas dos notas, no debe creerse que los conceptos matemáticos sean seres de razón que existan objetivamente sólo en el entendimiento. Son verdaderos conceptos intuidos,

abstraídos o deducidos que existen formalmente en el entendimiento, pero objetivamente en la realidad.

Por eso, las matemáticas, como las otras ciencias particulares, consideran un aspecto particular del ser, dejando a la Metafísica la consideración del ser en general.

"Scientiae aliae, quae sunt de entibus particularibus, considerant quidem de ente, cum omnia subjecta scientiarum sint entia, non tamen considerant ens secundum quod ens, sed secundum quod hujusmodi ens, vel numerus, vel ignis, vel linea aut aliquid hujusmodi" (in Met *Γ* 1, 1003 a 21, l. 1, n. 530).

"Scientiae mathematicae aliquod ens speculantur, scilicet ens quantum" (in Met. *Γ* 1, 1003 a 25, l. 1, n. 532).

Por eso, como se verá en el capítulo siguiente, las matemáticas tienen valor en el mundo sensible.

La riqueza y variedad de nociones que poseen las matemáticas se explica, según Santo Tomás, por ser la cantidad el accidente más cercano a la subsistencia, lo cual permite que unas cosas sean consideradas como sujetos y otras como propiedades.

"Quantitas inter alia accidentia propinquior est substantiae. Unde quidam quantitates esse substantias putant, scilicet lineam et numerum et superficiem et corpus. Nam sola quantitas habet divisiones in partes proprias post substantiam. Albedo enim non potest dividi, et per consequens nec intelligitur individuari nisi per subiectum. Et inde est quod in solo quantitatis genere aliqua significantur ut subjecta, alia ut passiones" (in Met. *Δ* 13, 1020 a 25, l. 15, n. 983).

Para terminar este capítulo, se pueden recoger aquí algunas indicaciones que hace Santo Tomás relacionadas con la existencia matemática.

Primeramente se puede resolver una cuestión que quedó suspensa en el capítulo cuarto. ¿Cómo existen las partes en el continuo? Ahora la respuesta es clarísima: sólo en potencia.

Santo Tomás lo dice expresamente en muchos lugares de sus obras [7]. Baste citar uno para muestra.

"Divisio reducit in actum quod erat in potentia. Nam partes continui sunt potentia in toto ante divisionem" (in Met. *Θ* 9, 1051 a 21, l. 10, n. 1888).

Luego, es importante saber cómo existen *dos* cantidades iguales. Sólo la posición, dice SANTO TOMÁS, las puede distinguir.

"Duae autem magnitudines aequalis quantitatis non possunt differre nisi secundum situm. Non enim potest imaginari quod haec linea sit alia ab illa sibi aequali, nisi inquantum imaginamur utramque in alio et alio situ" (in Phys. Δ 8, 216 b 10, l. 13, n. 1).

Por último una indicación sobre la bondad de las matemáticas. Todos conocen la objeción que se pone SANTO TOMÁS en su artículo *"Utrum omne ens sit bonum"*.

"Philosophus dicit in III metaphysicorum (B 1, 996 a 29-33) quod in mathematicis non est bonum. Sed mathematica sunt quaedam entia: alioquin de eis non esset scientia: ergo non omne ens est bonum" (S. Th. 1, q. 5, a 3, ob. 4).

¿Qué dice en realidad ARISTÓTELES sobre la bondad de las matemáticas?

Ocurre este pasaje en el libro B de los Metafísicos, donde ARISTÓTELES expone las *ἀπορίαι* que debe resolver en toda su obra y no puede dársele toda la autoridad de una frase demostrada.

El mismo SANTO TOMÁS hace observar esta circunstancia en su Comentario. Expone el texto aludido de este modo:

"Nullus omnino in mathematicis facit mentionem alicujus talium pertinentium ad bonum vel ad causam finalem.

Propter quod quidam sophistae, ut ARISTIPPUS, qui fuit de secta Epicureorum [8] omnino neglexit demonstrationes quae sunt per causas finales reputans eas viles ex hoc quod in artibus illiberalibus sive mechanicis, ut in arte 'tectonica' idest aedificatoria et 'coriaria' omnium rationes assignantur ex hoc quod est aliquid melius vel deterius. In

---

[7] Véanse, por ejemplo, in Phys. H 5, 249 b 27-250 b 7, 1.9,
Met. Z 13, 1039 a 3, 1.13, n. 1588
1.16,
1.5, n. 1825

Otros lugares pueden verse en el artículo del P. HOENEN *Utrum propter recentiora experimenta in crystallis admittenda sit vera discontinuitas* Gregor 6 (1925) p. 253-258.

[8] Este ARISTIPO es el fundador de la Escuela Cirenaica. Habla de él ZELLER *Die Philosophie der Griechen in seiner geschichtliche Entwicklung* vol. II, I, 347-352.

mathematicis vero, quae sunt nobilissimae et certissimae scientiae, nulla fit mentio de bonis et malis" [9] (in Met. B 1, 996 a 29-33, l. 4, n. 375).

Pero después, al señalar donde resuelve ARISTÓTELES cada una de las cuestiones propuestas, dice de las Matemáticas:

"Mathematica autem non moventur, nec movent nec habent voluntatem. Unde in eis non consideratur bonum sub nomine boni et finis. Consideratur tamen in eis id quod est bonum, scilicet esse et id quod est. Unde falsum est quod in mathematicis non sit bonum, sicut ipse infra in nono [10] probat" (in l. c. l. 4, n. 385).

En efecto, ARISTÓTELES en el libro M de los Metafísicos dice:

οἱ φάσκοντες οὐδὲν λέγειν τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας περὶ καλοῦ ἢ ἀγαθοῦ ψεύδονται (Met. M 2, 1078 a 33) [11].

Falta para terminar este capítulo establecer la comparación entre la doctrina propuesta y las matemáticas modernas.

Esta cuestión ha sido modernamente objeto de muchas investigaciones y sería difícil presentar aquí los resultados de estos trabajos, hechos por filósofos de tan diversas escuelas.

Baste indicar aquí las definiciones que han dado de "existencia matemática" dos investigadores modernos: uno de la escuela fenomenológica y otro de la Neo-Escolástica.

"Def. I Mathematisch existent heissen Gegenstündlichkeiten, die zum Thema einer mathematischen Theorie gemacht werden and in dieser Theorie *widerspruchsfrei fungieren* können.

Def. II Mathematisch existent sind solche Gegenstände, die von einem festgelegten Ausganspunkt aus mit bestimmt umschriebenen Mitteln *konstruiert werden können*".

O. BECKER *Die mathematische Existenz*, Jahrb. f. Phil. u. phän. Forschung. 8 (1927), p. 469.

"L'être mathématique est une propriété objective qui affecte nécessairement au regard de tout esprit l'être en tant qu'un et multiple".

---

[9] El texto griego de ARISTÓTELES dice lo contrario, es decir, que despreciaban las matemáticas.

[10] La edición Romana pone "XI", pero también es un error: es el libro M (13).

[11] Véase el comentario de W. D. ROSS (II, p. 418).

L. B. Guerard des Lauriers, *Analyse de l'être mathématique*, Rev. des Scien. Phil. et Theol. 22 (1923), p. 634.

En líneas generales, estas definiciones convienen con la doctrina expuesta en este capítulo.

De los detalles Santo Tomás no dijo nada y los modernos no concuerdan todavía.

CAPITULO X

LAS MATEMATICAS APLICADAS. LAS CIENCIAS MEDIAS

Los conceptos matemáticos existen fundamentalmente en el mundo sensible.

Nada extraño, pues, que las Matemáticas nos ayuden para conocerlo mejor.

Ya Aristóteles admitía ciencias enteras que aplicaban los principios abstractos de las Matemáticas al mundo sensible. Santo Tomás las llamaba "ciencias medias". Suelen enumerar estas tres:

la perspectiva como aplicación de la Geometría,
la música [1] como aplicación de la Aritmética,
la astrología [2] como aplicación de ambas [3].

---

[1] Para darse cuenta de la naturaleza de la música en aquel tiempo, basta dar una ojeada a los cinco libros *de Música* de Boecio (PL 63), solamente los capítulos 14-17 del libro IV concuerdan algo con lo que ahora es la música teórica.

G. Amelli publicó una disertación sobre Santo Tomás y la Música, y un opúsculo falsamente atribuido al Santo. *Divi Thomae Aquinatis de Arte Musica*, Mediolani, 1880.

[2] Otras veces suele decir "astronomia", "Astronomia quae videtur circa mobilia incorruptibilia considerationem habere magis est naturalis quam mathematica, ut supra dictum est" (in Phys. B 7, 198 a 29-31, l. 11, n. 3).

Aristóteles, según Bonitz (*Index Aristotelicus* 116 b 37-117 a 23) usa sólo *ἀστρολογία* y *ἀστρολογικός*.

Luego *ἀστρολογία*, pasó a significar el arte de adivinar por las estrellas y

"Dicuntur autem scientiae mediae, quae accipiunt principia abstracta a scientiis pure mathematicis, et applicant ad materiam sensibilem;

sicut perspectiva applicat ad lineam visualem ea quae demonstrantur a geometria circa lineam abstractam;

et astrologia considerationem geometriae et arithmeticae applicat ad caelum et ad partes ejus" (in Phys. B 2, 194 a 7, l. 3, n. 8).

Distinguen, pues, dos clases de ciencias matemáticas:

Matemáticas puras
y Matemáticas aplicadas (ciencias medias) [6].

"Quod autem mathematicae dicuntur esse sine motu referendum est ad illas scientias quae sunt pure mathematicae; sicut arithmetica et geometria.

Astrologia enim considerat motum, quia astrologia est media scientia inter mathematicam et naturalem. Principia enim sua astrologia et aliae mediae applicant ad res naturales" (in Met. A 8, 989 b 32, l. 13, n. 202).

Muchas veces Aristóteles y Santo Tomás aplicaban ellos mismos las fórmulas matemáticas para aclarar las cuestiones físicas. Véase, por ejemplo, este párrafo de los Físicos:

"Sic igitur se habet nunc ad tempus, sicut mobile ad motum: ergo secundum commutatam proportionem, sicut tempus ad motum, ita et nunc ad mobile".

Simbólicamente: $N:T :: M:m \rightarrow Nm = TM \rightarrow T:m :: N:M$ (in Phys. Δ 11, 219 b 15, l. 18, n. 4).

ἀστρονομία quedó reservada al estudio del movimiento de los astros. Véase el art. *Astronomie* de la Real-Enzyclopädie de Pauly-Wissova.

Santo Tomás entre los astrónomos cita Ptolomeo (in de Cael. A 1, 268 a 15, l. 2, n. 7). Su obra se llama *συντάξεως μαθηματικῆς* y ha sido editada por *Heiberg*, Leipzig, Teubner, 1898. En la misma colección figura una traducción alemana de esta obra hecha por *K. Manitius*, Leipzig, Teubner, 1912-1913.

[5] Además de los lugares citados en este capítulo véanse también:

in An. Post. A 7, 75 b 16, l. 15, n. 7
9, 76 a 22, l. 17, n. 6
13, 78 b 37, l. 25, n. 3

[6] También Proclo (in *Euclidis Comm.*, ed. *Friedlein*, p. 38, 2-42, 8) distingue entre

τὴν μὲν περὶ τὰ νοητὰ μόνον
τὴν δὲ περὶ τὰ αἰσθητά

No sólo admitían de hecho la existencia de estas ciencias, sino que señalaban la razón de este ensanche de las matemáticas a otros dominios.

Es porque las relaciones de mayor, igual y menor se encuentran en todo lo que se puede dividir no sólo en sentido estricto, sino aún en el sentido de intensidad y remisión.

"Tria quaedam, idest plus et minus et aequale, tam in contingentibus continuis, quam etiam in quolibet alio divisibili, contingit accipere, sive dividatur secundum numerum, sicut omnia discreta, sive per accidens, puta per intensionem et remissionem qualitatis in subjecto" (in Eth. N. B 5, 1106 a 26, l. 6, n. 310).

Por esto admitían también expresamente la medida de las cualidades [5], no sólo en su extensión, sino también en su intensidad.

τὸ μέτρον ἑκάστου ἕν, ἐν μήκει, ἐν πλάτει, ἐν βάθει, ἐν βάρει, ἐν τάχει (Met. I 1, 1052 b 26).

Santo Tomás, al comentar este texto, observa cómo a pesar de las dificultades que parece haber, la medida se aplica también a las dos cualidades indicadas, gravedad y velocidad.

"Et de dimensionibus quidem nullum dubium erat quin quantitates essent, et quod propric eis primo competeret mensurari.

"Sed de gravitate et velocitate poterat esse dubium, eo quod magis videntur esse qualitates quam quantitates. Et ideo dicit quomodo pertinent ad genus quantitatis et quomodo competit eis mensurari" (in l. c. l. 2, n. 1491-1492).

Admitida la existencia de estas ciencias medias, es necesario precisar su situación con respecto a los dos extremos.

Más se acercan a las ciencias físicas que a las Matemáticas. Aristóteles las llama *τὰ φυσικώτερα τῶν μαθημάτων* (194 a 7). Santo Tomás explica esta denominación por su principio general de que la especificación se toma por el término.

"Hujusmodi autem scientiae, licet sint mediae inter scientiam naturalem et mathematicam, tamen dicuntur hic a philosopho esse magis naturales quam mathematicae, quia unumquodque denominatur et speciem habet a termino: unde, quia harum scientiarum consideratio ter-

[5] Véase sobre esta cuestión P. Hoenen *Cosmología*, Romae, P. U. Greg., 1936, p. 185-204.

minatur ad materiam naturalem, licet per principia mathematica procedant, magis sunt naturales quam mathematicae" (in Phys. B 2, 194 a 7, l. 3, n. 18).

Casi son contrarias a las ciencias matemáticas. Dice de ellas Aristóteles que *ἀνάπαλιν τρόπον τιν' ἔχουσι τῇ γεωμετρίᾳ* (194 a 9) y lo demuestra con un ejemplo concreto que Santo Tomás desarrolla claramente.

"Dicit ergo de hujusmodi scientiis quod contrario modo se habent cum scientiis quae sunt purae mathematicae, sicut geometria vel arithmetica.

Nam geometria considerat quidem de linea quae habet esse in materia sensibili, quae est linea naturalis; non tamen considerat de ea inquantum est in materia sensibili, secundum quod est naturalis, sed abstracte, ut dictum est.

Sed perspectiva e converso accipit lineam abstractam secundum quod est in consideratione mathematici, et applicat eam ad materiam sensibilem; et sic determinat de ea non inquantum est mathematica, sed inquantum est physica" (in Phys. B 2, 194 a 9, l. 3, n. 8).

De esta diferencia entre estas dos clases de ciencias deduce Santo Tomás una hermosa confirmación de la abstracción matemática.

"Ex ipsa ergo differentia scientiarum mediarum ad scientias pure mathematicas apparet quod supra dictum est. Nam si hujusmodi scientiae mediae abstracta applicant ad materiam sensibilem, manifestum est quod mathematicae e converso ea quae sunt in materia sensibili abstrahunt" (in Phys. B 2, 194 a 9, l. 3, n. 8).

Otra comparación puede establecerse entre estas dos clases de Ciencias con respecto al grado de certeza que poseen.

Naturalmente, como son más físicas que matemáticas, no llegan a obtener la certeza suma de las ciencias matemáticas puras.

Dice Aristóteles: *'Ακριβεστέρα δ' ἐπιστήμη ἐπιστήμης καὶ πρότερα ἡ μὴ καθ' ὑποκειμένου τῆς καθ' ὑποκειμένου, οἷον ἀριθμητικὴ ἁρμονικῆς* (An. Post. A 27, 87 a 33).

Santo Tomás explica este principio, refiriéndose a la doctrina expuesta en el libro II de los Físicos:

"Accipitur hic subjectum pro materia sensibili, quia, ut Philosophus

docet in II Physicorum, quaedam scientiae sunt pure mathematicae... quaedam autem scientiae sunt mediae...

Unde hic dicit quod arithmetica est certior quam musica et prior: prior quidem, quia musica utitur principiis ejus ad aliud; certior autem quia incertitudo causatur propter transmutabilitatem materiae sensibilis; unde quanto magis acceditur ad eam, tanto scientia est minus certa" (in l. c. l. 41, n. 3).

Todos los físicos modernos usan las matemáticas como un instrumento de trabajo con un éxito admirable. Pero los filósofos que no admiten la abstracción de los conceptos matemáticos del mundo real, se encuentran ante un problema insoluble: ¿Cómo y por qué una ciencia pura y abstracta se aplica al mundo sensible y concreto? [6].

---

[6] Véase el capítulo Mathematik und Wirklichkeitserkenntnis de la *Philosophie der Mathematik in der Gegenwart*, de W. DUBISLAV, Berlin, Junker, 1932.

CAPITULO XI

LOS TEOREMAS DEDUCTIVOS. LA DEMOSTRACION MATEMATICA

Falta sólo estudiar el último estadio, que comprende los teoremas deductivos.

Este estadio lo deduce el matemático. El filósofo sólo analiza los métodos de demostración y admira la certeza que producen en el alma.

En este capítulo estudiaré las demostraciones matemáticas y en el siguiente la certeza que tales demostraciones producen.

Casi toda la teoría de la demostración en ARISTÓTELES se funda en las demostraciones matemáticas [1].

Leyendo los **ἀναλύτικα ὕστερα**, tropezamos a cada paso con ejemplos tomados de la aritmética y de la geometría [2].

---

[1] "Die aristotelische Logik war in wesentlichen abstrahiert aus der Mathematik" dice WEYL en su *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Handb. der Phil. IV, I München u. Berlin, 1927.

[2] Viene bien recoger siquiera en una nota unos cuantos ejemplos de los más típicos, que usan ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS al explicar la teoría general de la demostración.

"Eadem ratione qua non demonstratur universale cum de singulis speciebus aliquid demonstratur, quod non est universale praedicatum communis innominati; nec etiam demonstratur universale modo praedicto, si sit commune nomen positum".

Pone este ejemplo. Si se demuestra algo de cada una de las especies de triángulos, no se demuestra del triángulo.

"Et hoc ideo, quia non cognovit de triangulo secundum quod est triangulus, sed sub ratione specierum ejus. Unde neque cognovit per se loquendo omnem

No es este el lugar de presentar la teoría aristotélica de la demostración, que da materia sobrada para otra disertación [1].

Sólo nos toca indicar las características de las demostraciones matemáticas.

Estas se reducen a tres:

Axiomas clarísimos,
Términos muy precisos,
Forma rigurosísima.

Primeramente: axiomas clarísimos. Baste recordar aquí lo indicado ampliamente en el capítulo séptimo. Los primeros principios matemáticos, al revés de los físicos, son manifiestos y claros objetiva y subjetivamente.

Basta un conocimiento claro de los términos para entender los principios. Pues bien, todas las demostraciones matemáticas se reducen en último término a estos principios primeros; de aquí su precisión y claridad.

"Quemadmodum diagramma, quae est descriptio geometrica, in qua qui vult probare aliquam conclusionem oportet quod resolvat conclusionem in principia quousque perveniat ad principia prima indemonstrabilia" (in Eth. N. Γ 5, 1112 b 21, l. 8, n. 476).

---

triangulum; quia et si secundum numerum cognovit omnem triangulum (si nullus est quem non cognovit) tamen secundum speciem non cognovit omnem. Tunc enim universaliter aliquid cognoscitur secundum speciem, quando cognoscitur secundum rationem speciei" (in An. Post. A 5, 74 a 25, l. 12, n. 9).

Para probar que la demostración debe ser "ex principiis propriis", trae el ejemplo de la cuadratura del círculo según la proponía un tal Briso. Se fundaba en este principio general: "In quocumque genere est invenire aliquid majus et minus alicui, in eodem est invenire et illi aequale". Ahora bien, fácil es ver que hay cuadrados mayores y menores que un círculo; luego hay cuadrados iguales.

Véanse además otros ejemplos:

in An. Post. A	2,72 a 28,	l. 6,	n. 2
	4,73 a 25,	l. 9,	n. 3
	73 b 30,	l. 11,	n. 5-8
	6,74 b 25,	l. 13,	n. 6
	7,75 b 22,	l. 15,	n. 4
	11,77 a 22,	l. 20,	n. 3
	17,80 b 17,	l. 29,	n. 2-3

[1] Sobre este tema hizo su tesis doctoral el Prof. Jan Salamucha que la publicó después en su lengua con el título *Pojecie dedukcji u Arystotelesa i św. Tomasza z Akwinu*, Warsawa, 1930.

Pero hay además otra causa de esta precisión en las demostraciones: son los términos que emplea.

Sólo la *causa formal* sirve para las demostraciones matemáticas.

ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS excluyen expresamente la *causa final* [4].

"Ex hoc enim quod finis non potest esse in rebus immobilibus, videtur procedere quod in scientiis mathematicis, quae abstrahunt a materia et motu, nihil probetur per hanc causam" (in Met. B 2, 998 a 30, l. 4, n. 375).

Por una consideración más general excluyen también la *causa eficiente.*

"Non enim videtur quod esse possit principium motus in rebus immobilibus. Ponuntur autem quaedam entia immobilia, et praecipue secundum Platonicos ponentes numeros et substantias separatas" (in Met. B 2, 996 a 26, l. 4, n. 373).

La causa material a veces y en cierto sentido sirve también para las demostraciones matemáticas.

Tiene dos limitaciones: *a veces,* es decir, cuando se demuestra algo del todo por las partes, como es el caso de la demostración del valor del ángulo inscrito en un semicírculo.

En cierto sentido, porque como advierten ARISTÓTELES y SANTO TOMÁS también en este caso se puede llamar demostración por la causa formal, considerando otra definición.

"Proponit exemplum (demonstrationis ex causa materiali) in mathematicis. Nec est contra id quod dicitur in III Met., quod mathematicae scientiae non demonstrant per causam materialem [5].

Mathematica enim abstrahit quidem a materia sensibili, non autem a materia intelligibili, ut dicitur in IV Met., quae quidem materia intelligibilis consideratur secundum quod aliquid divisibile accipitur vel in numeris vel in continuis.

Et ideo quandocumque in mathematicis aliquid demonstratur de

[4] Este es el texto que da ocasión a ARISTÓTELES para hablar de la bondad de las matemáticas, cuestión que quedó tratada en el capítulo noveno.

[5] Habla en el lugar citado de la causa final y a lo más de la eficiente; pero no dice nada de la causa material. El Cardenal ZIGLIARA que preparó el primer volumen de la edición leonina, nota al margen los textos de SANTO TOMÁS (sólo la lección) y de ARISTÓTELES según la edición DIDOT, pero son los que se refieren a la causa final.

toto per partes videtur esse demonstratio per causam materialem: partes enim se habent ad totum secundum rationem materiae, ut habetur in II Phys. Et quia materia magis proprie dicitur in sensibilibus, propter hoc noluit eam nominare causam materialem, sed causam necessitatis".

Explica ahora la prop. XXXI del libro III de Euclides.

"Subjungit autem quod hic modus demonstrationis potest etiam ad causam formalem pertinere, quam nominaverunt *quod quid erat esse*: eo quod esse medium duorum rectorum potest accipi ut ratio significans *quod quid est* recti anguli" (in An. Post. A 4, 73 a 28, l. 9, n. 5).

Podemos, pues simplemente decir que las demostraciones matemáticas usan sólo la causa formal que se expresa por medio de la definición, es decir, que usan como principios las definiciones.

"Manifestum est;... quod in scientiis demonstrativis principium demonstrationis est definitio" (in Phys. B 9, 200 a 29, l. 15, n. 8).

Por eso las demostraciones matemáticas son necesarias con una necesidad absoluta.

"Invenitur enim in scientiis demonstrativis necessarium a priori, sicut si dicamus quod quia definitio recti anguli est talis, necesse est triangulum esse talem, scilicet habere tres angulos aequales duobus rectis" (in Phys. B 9, 200 a 15, l. 15, n. 5).

Finalmente la última característica de las demostraciones matemáticas es su forma externa. Sólo usan la primera figura lógica en sus dos formas generales.

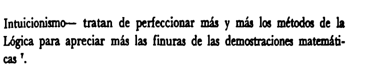
"Mathematicae scientiae, ut arithmetica et geometria, et quaecumque aliae propter quid demonstrat ut plurimum prima figura utuntur" (in An. Post. A 14, 79 a 18, l. 26, n. 2).

Tanto han cautivado las modernas inteligencias las demostraciones matemáticas que una escuela entera considera a las matemáticas como una simple rama de la Lógica [6]. Las otras dos escuelas —Formalismo e

---

[6] Los abanderados de esta escuela son Whitehead y Russell en su obra *Principia Mathematica*, que se ha hecho la obra clásica de logística (ed. 2, Cambridge, 1925).

Siguen también esta opinión los del Wiener Kreis, particularmente R. Carnap en su artículo *Die Mathematik als Zweig der Logik*, Blät. f. deutsche Phil. 4 (1930), 298-310.


Intuicionismo— tratan de perfeccionar más y más los métodos de la Lógica para apreciar más las finuras de las demostraciones matemáticas [7].

CAPITULO XII

LA CERTEZA MATEMATICA

Para terminar el estudio de la Filosofía de las Matemáticas en SANTO TOMÁS, falta considerar el último resultado que estas ciencias producen en el alma, es decir, la certeza matemática.

Este capítulo es un simple corolario de todo lo que ha quedado expuesto en los capítulos anteriores.

En efecto: las primeras nociones, los axiomas y las demostraciones son, en último análisis, el fundamento de la certeza matemática.

Todos estos elementos han quedado estudiados en los tres estadios.

Poseemos las primeras nociones matemáticas por una intuición certísima.

Ellas son el fundamento de la certeza de toda la ciencia.

"Illa enim per se intelliguntur; et talis eorum cognitio est certior omni scientia, quia ex tali intelligentia scientia certitudinem habet" (in An. Post. A 31, 87 b 38, l. 42, n. 8).

Además entendemos los axiomas perfectísimamente con sólo entender los términos, ya que responden a las primeras propiedades del ser.

"in mathematicis... eadem sunt notiora quoad nos et secundum naturam" (in De An. B 2, 413 a 12, l. 3, n. 245).

Las demostraciones, por fin, son tan rigurosas que dan a las matemáticas el primado entre las ciencias demostrativas.

"In his (in demonstrativis) autem principaliores sunt mathematicae scientiae, propter certissimum modum demonstrationis" (in An. Post. A 1, 71 a 3, l. 1, n. 10).

Estos son los elementos que integran la certeza matemática; pero SANTO TOMÁS ha buscado más hondas raíces a esta certeza, comparándola con las otras dos ciencias [1].

Por un lado, las matemáticas abstraen de la materia, que impide a la física este grado supremo de certeza.

Por otra parte, las matemáticas no exceden las fuerzas de nuestro entendimiento que queda muchas veces ofuscado ante el resplandor de las nociones metafísicas.

"Mathematica sunt abstracta a materia et tamen non sunt excedentia intellectum nostrum: et ideo in eis est requirenda certissima ratio" (in Met. α 3, 995 a 15, l. 5, n. 336).

Por eso concluye SANTO TOMÁS que en las Matemáticas se encuentra una certeza absoluta.

"Mathematica est circa materiam in qua invenitur omnimoda certitudo" (in Eth. N. A 1, 1094 b 26, l. 3, n. 36).

Esto explica que haya hombres apasionados por las matemáticas, que se deleiten con estas ciencias, porque precisamente cuánto más se deleitan, más entienden y entendiendo cada vez más, gozan más también.

"Geometrae qui delectantur in consideratione geometriae, magis possunt intelligere singula hujusmodi considerationis, quia mens magis detinetur in eo in quo delectatur" (in Eth. N. I 5, 1175 a 33, l. 7, n. 2043).

Elogios semejantes han recibido las matemáticas de todos los grandes pensadores antiguos y modernos

MONTUCLA en su *Histoire des Mathématiques* (vol. I, París, 1758, p. 18), recoge muchas de estas frases en un capítulo que tiene por título: "Eloges qu'elles (les mathématiques) ont reçu dant tous les temps des meilleurs esprits et des philosophes les plus illustres".

Bien pudiera figurar en esa hermosa serie alguna de las frases de SANTO TOMÁS que ha sido recogida en este capítulo.

---

[1] Trata sobre esto una cuestión muy interesante D. GARCÍA *De rebus metaphysicæ perfectis*, Barcinone, 1930, p. 75-78.

CONCLUSION

LA FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS EN SANTO TOMAS

Santo Tomás no compuso una teoría del conocimiento. Menos aún una Filosofía de las Matemáticas.

Pero vió la necesidad de una Metamatemática, que diría Hilbert, y le asignó un puesto de honor en la Filosofía.

"Quaerit cujus scientiae sit 'dubitare de materia mathematicarum scientiarum', idest inquirere de quibus mathematicae considerent.

Non enim hoc est scientiae naturalis, propter hoc quod totum negotium naturalis philosophiae est circa ea quae habent in seipsis principium motus et quietis, quae naturalia dicuntur.

Unde de hac dubitatione se non intromittit.

Similiter etiam consideratio hujus dubitationis non videtur pertinere ad illam scientiam, quae intendit de demonstratione et scientia mathematicorum, quae dicitur mathematica scientia; quia huiusmodi scientia praesupponit hujusmodi materia, sive hujusmodi subjectum; et circa ipsum alia inquirit.

Unde relinquitur quod ad hanc philosophiam pertineat considerare, de quo tractant scientiae mathematicae" (in Met. K 1, 1059 b 15, l. 1, n. 2165).

Pero Santo Tomás fué más adelante. Trazó un esquema de Filosofía de las Matemáticas.

"Supponuntur in his scientiis ea quae sunt prima in genere quantitatis, sicut unitas et linea, et superficies et alia hujusmodi.

Quibus suppositis, per demonstrationem quaeruntur quaedam alia,

sicut triangulus aequilaterus, quadratum in geometricis et alia hujusmodi. Quae quidem demonstrationes quasi operativae dicuntur, ut est illud, Super rectam lineam datam triangulum aequilaterum constituere.

Quo adinvento, rursus de eo aliquae passiones probantur, sicut quod ejus anguli sunt aequales aut aliquid hujusmodi" (in An. Post. A 1, 71 a 5, l. 2, n. 5).

Mi tesis se reduce a bordar un Comentario a este magnífico texto.

El *Primer estadio* comprende solamente las primeras nociones.

Como todas las ideas, las matemáticas tienen su último fundamento en los *sentidos externos.* La unidad y el número, la extensión y la figura son sensibles comunes.

Pero el campo de experimentación matemática es la *imaginación.* Lo que los sentidos externos son para la Física, es la imaginación para las Matemáticas.

Entra luego el entendimiento, que considera sólo la cantidad, sin considerar los demás accidentes. Es la famosa "abstracción de segundo grado", que he tenido la satisfacción de ver escrita de puño y letra de Santo Tomás.

La unidad y el número pueden considerarse como las primeras ideas aritméticas.

La unidad es algo sagrado para los medievales.

Entre muchos conceptos de número que distingue Santo Tomás, el único que interesa al matemático es el número predicamental abstracto.

El continuo es la idea fundamental de la Geometría.

Las tres dimensiones eran para Santo Tomás una verdad matemática rigurosamente demostrada.

Los límites existen sólo potencialmente en el cuerpo matemático.

Entre la unidad y el punto hace Santo Tomás un paralelismo curioso de sabor platónico.

Entre el número y el continuo señala estas tres relaciones fundamentales:

1) el número se conoce por la división del continuo;

2) el número es causado por la división del continuo;

3) Las propiedades del número se conocen por las propiedades del continuo.

Entre la Aritmética y la Geometría da el primado intelectual a la Aritmética.

Una de las propiedades mixtas del número y del continuo es el

infinito. El que un continuo pueda dividirse siempre, es causa de que un número pueda crecer siempre.

De estas primeras nociones se originan los axiomas clarísimos de las matemáticas.

El *Segundo estadio* es el característico de las Matemáticas. Supuestas las primeras nociones, se buscan otras por demostración, dice SANTO TOMÁS. Para buscarlas es menester conocer la significación de lo que se busca: son las definiciones nominales.

La demostración que las encuentra es de tipo constructivo como el primer teorema de EUCLIDES.

Por esto, la existencia matemática se reduce a una posibilidad intuida, abstraída o demostrada.

Además de esta existencia ideal de las matemáticas, hay otra existencia vital de las mismas dentro del mundo sensible; a conocerla se dedican las matemáticas aplicadas, las "ciencias medias" que dice SANTO TOMÁS.

El *Tercer estadio,* por fin, es común a todas las ciencias; pero el de las matemáticas se distingue por el rigor de las demostraciones.

Por eso las matemáticas, en frase de SANTO TOMÁS, son para nosotros las ciencias más ciertas.

APENDICE

INDEX LOCORUM UBI S. THOMAS DE MATHEMATICIS AGIT

N. B. 1. Ex Commentariis in ARISTOTELEM,

Ex Quaestionibus in BOETIUM de Trinitate,
Ex Summa Theologica, quae mihi integra legere datum fuit, ii omnes adducuntur loci, ubi verbum est de mathematicis.
Ex aliis vero operibus, ii tantum indicantur qui in textu usurpati vel adducti sunt.

2. Sensum uniuscujusque textus dare, prout *una linea comprehendi* valuerat, conatus sum.
3. Simplicitatis causa non indicantur loci aristotelici.
4. Brevitatis causa his utar abbreviationibus:

Arit. = Arithmetica, us, i, etc.
Def. = Definitio.
Ex. = Exemplum, a.
Geom. = Geometria, geometra, etc.
Inf. = Infinitus, a, um, etc.
Mat. = Mathematicus, a, i, etc.
Op. = Opino, opiniones.

IN DE INTERPRETATIONE

De Int.	l. 1, n. 4	—	Definitiones ponuntur.
	l. 5, n. 22	—	1 Operatio naturam, 2 esse.
	l. 8, n. 6	—	Numerus univoce praedicatur.

IN ANALYTICA POSTERIORA

I Post. An.	l. 1, n. 10	Math. Principaliores demonstrativae
	l. 2, n. 5	Structura Math.
	n. 6	Unitas ut subjectum ar.
	n. 9	Ex. de angulis trianguli.
	l. 3, n. 1	Ex. de angulis trianguli.
	n. 2	Geometria Manonis
	n. 4	Ex. de paritate dualitatis
	l. 4, n. 13	Ex. de diametro quadrati (X E u c l i d i s)
	n. 16	Principia Math. notiora simpliciter et quoad nos
	l. 5, n. 6	Petitio et axioma
	n. 7	Ex. anguli recti aequales (ex definitione)
	n. 8	Duplex positio (suppositio et definitio)

I Post. An.	l. 6, n. 2	Ex. de angulis trianguli
	l. 7, n. 3	proc. in inf. in principiis
	n. 7	inf. media in actu
	l. 9, n. 3	Ex. de angulis trianguli
	l. 10, n. 3	"punctum *per se* inest lineae"
	n. 4	"par et impar insunt numero per se"
	n. 8	"impar idem ac non par"
	l. 11, n. 5	punctum et rectitudo per se linea
	n. 7	Ex. de angulis trianguli
	l. 12, n. 6	Ex. de parallelis
	n. 7	Ex. de angulis trianguli
	n. 8	Definitio et proprietas proportionis
	n. 9-11	Ex. de angulis trianguli
	l. 13 n. 2	Ex de numero pari vel impari
	n. 6	Unusquisque accipit primum proprium
	l. 14, n. 2	Ex. de numero pari vel impari.
	l. 15, n. 2	Geom. nihil demonstrat de Arith.
	n. 4	Arith. de numeris, Geom. de magnitudinibus
	n. 5	Linea simpliciter et Linea visualis
	n. 6	Ex. de angulis trianguli
	n. 7	Perspectiva et musica sub Geom. et Arith.
	n. 8	Geom. non demonstrat pulchritudinem lineae
	l. 17, n. 2	Tetragonismus B r y s o n i s
	n. 3	In musica demonstratur per Arith.

I Post. An.	l. 17, n. 4	Subjectum Arith. est numerus
	n. 6	Perspectiva sub Geom.; musica sub Arith.
	l. 18, n. 4	Arith. accipit et quia et quid unitas.
	n. 8	Principia proportionata Geom. et Arith.
	l. 19, n. 3	"Communis animi conceptio" et petitio
	n. 4	Suppositio et positio
	l. 20, n. 3	Demonstratio ad absurdum
	l. 21, n. 2	Non omnis quaestio est geometrica
	n. 4	Propriae theses Geom.
	n. 5	Munus Geom. munus Philosophi
	l. 22, n. 2	Quaestiones non geometricae
	n. 3	a) non pertinentes
	n. 4	b) contrariae Geom.
	n. 5	Ex. de circulo
	n. 11	Math. convertibilia
	n. 12	Ex. de angulis trianguli
	l. 25, n. 2	Scientiae mediae
	n. 3	Convenientia inter eas
	n. 4	Aliae *quia*, aliae *propter quid*
	n. 5	Subalternans et subalternata
	n. 6	Ex. de figuris geometricis.
	l. 26, n. 2	Demonstrationes math. in I figura
	l. 29, n. 2	Ex. de angulis trianguli
	l. 30, n. 5	Principia math. ex sensibus
	l. 31-l. 35	In demonstrationibus non proceditur in inf.

I Post. An.	l. 36, n. 3	Ex. de angulis trianguli
	l. 37, n. 5	Ex. de angulis trianguli
	n. 6	de triangulis et numeris
	n. 7	de angulis trianguli
	n. 9	de triangulo
	l. 38, n. 3	Ex de angulis extrinsecis trianguli
	n. 7	Ex de angulis trianguli
	l. 41, n. 3	Arith. certior musica
	n. 4	Arith. certior Geom.
	n. 5	Duplex materia
	n. 7	Finis Geom.
	n. 9	Ex. de triangulis
	n. 11	Non est eadem scientia Geom. et naturalis
	n. 14	Ex de angulis trianguli
	l. 42, n. 3	Math. sunt semper vera
	n. 7	Ex de angulis trianguli
	l. 43, n. 5	Puncta et unitates
	n. 6	Principia propria quantitatis
	n. 7	Conclusiones infinitae ex principiis
	n. 9	Quaedam sunt principia Geom.
	n. 11	Duplex genus principiorum
	n. 13	Numerus Arith. magnitudo Geom.
	l. 44, n. 3	Intellectus principium scientiae
II Post. An.	l. 1, n. 8	Ex. de numero
	n. 9	Definitio passionis et subjecti
	n. 11	Ex. de angulis trianguli

II Post. An.	l. 2, n. 5	Ex. de angulis trianguli
	n. 9	Processus in inf. in demonstrationibus
	n. 10	Arith. supponit unitatem
	n. 11	Ex. trianguli
	n. 12	Ex. de angulis trianguli
	l. 3, n. 11	Anima numerus
	l. 5, n. 5	Unum est indivisibile
	l. 6, n. 4	Geom. accipit significationem trianguli et probat esse.
	n. 5	Post definitionem, rationes exsistentiae
	l. 7, n. 8	Ex. de angulis trianguli
	l. 8, n. 4	Unitas principium in Arith.
	n. 6	Exemplum trianguli
	n. 10	Tres modi definitionum
	l. 9, n. 5	Demonstratio math. ex. causa materiali
	n. 6	Ex. anguli in semicirculo
	l. 10, n. 6	Proc. in inf. in mediis
	n. 7	Fieri: factum esse=linea: puncto
	l. 11, n. 2	Inf. puncta potentialiter in linea
	n. 5	Inf. facta esse in uno fieri
	n. 6	Inf. divisio futuri in instantia
	l. 13, n. 3	Ex. de numero
	n. 5	Duplex modus numeri primi
	n. 8	Ex. de numero
	n. 9	De essentia ternarii
	l. 14, n. 2	Processus ad definiendum

II Post. An.	l. 15, n. 5	Ex de pari et impari
	l. 16, n. 7	Simile in figuris
	l. 19, n. 3	Proportio commutata
	l. 20,	De primis principiis

IN LIBROS PHYSICORUM

I Phys.	l. 1, n. 2	Math. abstracta secundum rationem
	n. 3	Math. de his abstractis
	n. 5	Punctum principium lineae non causa
	l. 2, n. 2	Principia infinita ex antiquis
	n. 4	Geom. non probat sua principia.
	n. 7	Ex de tetragonismo
	l. 3, n. 2	Inf. per se loquendo solum in quantitate
	n. 3	Triplex sensus unitatis
	l. 5, n. 3	Inf. quod non habet principium et finem
	l. 6, n. 5	Continuum quodammodo multa.
	n. 11	Proc. in inf. in divisione
	l. 7, n. 3	Op. Platicorum de resolutione corporis in superficies
	l. 8, n. 5	Anaxagoras infinita principia.
	l. 9,	Contra Anaxagoram.
	l. 10, n. 2	Ex. de figuris
	n. 3	Non est processus in inf. in contrariis
	n. 6	Op. Pythagoricorum

I Phys.	l 11, n. 3	Inf. inquantum hujusmodi est ignotum
	n. 4-6	Non sunt inf. principia
II Phys.	l. 2, n. 1	Infinitae corruptiones.
	l. 3, n. 4	Math. et phil. eadem considerant, sed diverse
	n. 5	De abstractione mathematica
	l. 3, n. 7	Definitiones naturales et math.
	n. 8	De scientiis mediis
	n. 9	De astrologia
	l. 4, n. 2	Alia consideratio naturalis et math.
	l. 5, n. 4	Proportiones numerales applicantur ad sonos
	l. 6, n. 2	Ex. diapason
	l. 8, n. 8	Causa per accidens infinita
	l. 9, n. 1	inf. ignotum
	n. 2	inf. de causis
	n. 4	Fortunae infinitae
	l. 10, n. 14	In math. propter quid est causa formalis
	l. 11, n. 3	Astrologia est magis naturalis
	l. 15, n. 2	Ex. de angulis trianguli
	n. 5	In math. invenitur necessarium
	n. 6	Definitionibus utitur ut principiis
III Phys.	l. 1, n. 3	Inf. cadit in definitione continui
	n. 6	Multae relationes fundantur in quantitate
	l. 3, n. 5	Op. Pythagoricorum

III Phys.	l. 4, n. 11	Distantia 1 ad 2 et 2 ad 1 diversa secundum rationem
	l. 5, n. 10	Ex de distantia numerorum
	n. 15	Dimensiones: mensura intrinseca rei
	l. 6—l. 13	Tractatus de infinito
IV Phys.	l. 1, n. 7	De sex distantiis
	l. 2, n. 2	Quod habet tres dimensiones est corpus
	l. 2, n. 3	Duo puncta conjuncta sunt unum
	n. 6	In locis non est proc. in inf.
	l. 3, n. 4	Longitudo, latitudo et profunditas
	n. 5	Ex. de lineis et punctis
	n. 10	Contra numeros Platonis
	l. 6, n. 7	Divisio non causat dimensionem
	l. 8, n. 3	Punctus et locus puncti non differunt
	n. 5	Ex. de puncto in linea
	l. 10, n. 5	Ex. de puncto in corpore
	l. 11, n. 5	In inf. non esset sursum vel deorsum
	l. 12, n. 3	Ex. proportionis in velocitate
	n. 4	Ex. proportionis in numeris
	l. 13, n. 1	Definitio cubi
	l. 14, n. 12	De qualitate in quantitate
	n. 13	Major et minor circumferentia
	l. 15, n. 3	Ex. 4 est pars 6
	n. 5	Inf. "nunc" inter duo
	n. 6	Saltem duo termini in divisibili
	l. 16, n. 2	Ex. de circulo
	l. 17, n. 6	Continuitas temporis ex motu

IV Phys.	l. 17, n. 7	Magnitudo habet prius et posterius
	n. 11	Numerus: numerans et numeratus
	l. 18, n. 4	Punctus motus facit lineam
	n. 5	Nunc ad tempus sicut punctum ad lineam
	n. 10	Idem punctum potest bis accipi
	n. 11	Puncta non sunt partes lineae
	l. 19, n. 2	In numeris est aliquis minimus
	n. 3	Velox vel tardum non competit numero
	n. 6	Uno cognoscimus numerum
	l. 20, n. 2	Omnia mensurantur per propriam mensuram
	n. 3	In numero aliquid ut pars, aliquid ut proprietas.
	n. 6	Inf. non constringit mensurari
	n. 12	Ex. de diametro quadrati
	l. 21, n. 2	Idem punctum ut principium et finis
	n. 6	Ex. de circulo
	l. 22, n. 4	Ex. de lineis
	n. 5	Ex. de puncto in linea
	l. 23, n. 4	Si non est numerans, non est numerus
	n. 5	Non tamen numerus pendent ab anima
	n. 9	7 canes et 7 equi non differunt numero
	n. 13	Idem numerus canum et equorum

V Phys.	l. 3,	n. 5	Definitiones sunt sicut numeri
		n. 8	Proc. in inf. in relationibus rationis
		n. 13	In generationibus non proc. in inf.
	l. 5,	n. 2	Continuum et contiguum
		n. 5	Minima distantia est linea recta
		n. 6	Ex. de numeris
		n. 8	Definitio continui
		n. 9	Continuum et consequenter se habens
	l. 5,	n. 10	Continuum et contactum
		n. 11	Punctum et unitas non sunt idem
	l. 6,	n. 3	Geom. est alia a grammatica
		n. 4	Geom. imaginantur punctum moveri
	l. 7,	n. 7	Ex. de circulo
		n. 8	Ex. de lineis
		n. 9	Ex. de lineis
	l. 8,	n. 9	Latitudo, longitudo, profunditas
VI Phys.	l. 1,	n. 2	Nullum continuum componitur ex indivisibilibus
		n. 7	In divisione proceditur in inf.
	l. 4,	n. 2	Inf. in ultimis
		n. 5	Ex. de numeris
		n. 9	Ex. de continuis
		n. 10	Ex. de in proportione
	l. 5,	n. 3	Nihil lineae est extra punctum
		n. 5	Ex. de lineis
		n. 6	Ex. de puncto in linea
	l. 5,	n. 10	Ex. de linea
		n. 19	Divisibilitas magnitudinis in inf.

VI Phys.	l. 6, n. 12	Inf. primo invenitur in continuo
	l. 7, n. 6	Tempus dividitur in inf.
	l. 8, n. 4	Punctus terminus lineae
	n. 5	Linea est inter duo puncta: Inf. in tempore
	n. 6	Infinita nunc in tempore
	n. 10	Tempus in inf. divisibile
	n. 11	Magnitudo divisibilis in inf.
	l. 8, n. 13	Motus divisibilis in inf.
	l. 9.	Inf. invenitur in magnitudine et in tempore
	l. 10, n. 5	Tempus divisibile in inf.
	n. 9	Loca multiplicantur in inf.
	l. 11, n. 4	Argumentum Z e n o n i s
	l. 12, n. 3	De sphaerae motu
	n. 6	Punctum non potest moveri
VII Phys.	l. 2.	In moventibus et motis non proceditur in inf.
	l. 3, n. 6	In moventibus per accidens non proc. in inf.
	l. 5, n. 3	Def. figurae
	l. 6, n. 2	Perfectio in math.
	n. 5	Ex sensitivis habemus scientiam
	l. 7, n. 1	Linea circularis et linea recta
	n. 5	Circularis et recta non comparantur
	n. 7	Ex. anguli acuti
	n. 8	Ex. dupli et dimidii
	n. 9	Multa math. in concreto sunt aequivoca

VII Phys.	l. 8, n. 4	Ex. de recto et circulari
	n. 16	Plato confundebat duplex unum
	l. 9, n. 4	Ex. de numero
	n. 8	Ex. de numero
VIII Phys.	l. 1, n. 3	Nulla scientia disputat de suppositionibus propriis
	n. 4	Democritus infinitos mundos posuit
	l. 1, n. 5	De tempore inf.
	l. 2, n. 13	Punctum non est medium lineae
	l. 3, n. 3	Duo inf. non habent ordinem ad invicem
	n. 5	Ex. de angulis trianguli
	n. 6	Vera cum causa suae veritatis
	l. 4, n. 1	Nulla mutatio est inf.
	l. 5, n. 3	Mathematici utuntur motu
	n. 5	Quantitas crescit et decrescit in inf.
	n. 6	Corpus divisibile in inf.
	l. 6, n. 2	De augmento in inf.
	n. 5	Ens inf. Melissi
	l. 9.	In moventibus et motis non proceditur in inf.
	l. 10, n. 2	Continuum divisibile in inf.
	l. 11, n. 2	In partibus moventis seipsum non proc. in inf.
	l. 12, n. 1	Motus inf.
	n. 6	Impossibilis unus effectus ex inf. causis
	n. 7	Principia non inf.

VIII Phys.	l. 13,	n. 3	In moventibus non proc. in inf.
	l. 14,	n. 8	In moventibus non proc. in inf.
	l. 19,	n. 6	Motus rectus non potest proc. in inf.
	l. 20,	n. 1	Ex. lineae rectae
	l. 21,		Movens finitum non potest movere per tempus inf.
	l. 23,	n. 3	In moventibus non proc. in inf.

IN DE CAELO ET MUNDO

I De Cael.	Proem.	n. 2	Ex semicirculi
	l. 1,	n. 2	Differentia Geom. a Phil. Naturali
	l. 2,	n. 2	Duplex definitio continui
		n. 3	Definitio corporis: trina dimensio
		n. 4	Ternarius juxta Platonicos
		n. 5	Ternarius in cultu divino
		n. 6	Ternarius ex usu commune loquendi
		n. 7	Numerus dimensionis pertinet ad math.
		n. 8	Corpus perfectum ex trina dimensione
		n. 9	Divisibilitas continui.-Motus puncti
	l. 3,	n. 1	Definitio veterum Inf.
		n. 3	Motus corporum, superficierum, linearum.
		n. 5	Duplex magnitudo
		n. 6	Geom. utitur principiis Arith.
	l. 4,	n. 9	Linea circularis est perfectior quam recta

I De Cael.	l. 4, n. 10	Linea recta perfecta
	n. 11	Circularis perfecta
	l. 5, n. 5	De inf. quod est in quantitate
	l. 7, n. 4	De augmento corporum math.
	l. 8, n. 4	De appositis circulari
	l. 9, n. 1	Triplex modus inf.
	n. 4	Negantes inf. math. multas difficultates.
	l. 10, n. 1	Pars finiti non potest esse infinita
	l. 11, n. 1	Definitione non datur figura inf.
	l. 16	Hucusque tractatus specialis de infinito
	l. 26, n. 4	Veritas math. ex suppositione
	l. 29, n. 3	Definitio inf.
II De Cael.	l. 2, n. 3	Tres dimensiones; sex directiones motus
	n. 11	Generatio dimensionum
	l. 5, n. 3	De primatu figurae curvae
	l. 15, n. 1	Math. requiritur ad astrologiam
	l. 26, n. 6	Probatio ex III Euclidis.
	n. 10	Math. in astrologia
	l. 28, n. 1	Ratio math. pro sphaera in terra
III De Cael.	l. 3.	Contra generationem corporum ex superficiebus
	l. 4, n. 1	Figurae respondentes elementis
	n. 2	Duplex contractus lineae
	n. 5	Punctus: linea=1: superficies=s: corpus

IN DE GENERATIONE

I De Gen.	l. 3, n. 5	Linea, superficies sunt pure math.
	l. 4, n. 1	Divisio in inf.
	n. 4	Punctum: divisio partium lineae
	l. 5, n. 4	In generatione non proc. in inf.
	n. 5	Non potest esse ut puncta sint ubique in actu.
	n. 6	Punctum divisio partium lineae
	l. 7, n. 5	Inf. continui
	l. 13, n. 2	Puncta et lineae termini dimensionum

IN METEOROLOGICORUM

I Meteor.	l. 2, n. 5	Ex de puncto in circulo
	l. 3, n. 6	Sufficienter ostensa per Math.
	l. 4, n. 3	De angulis radiorum
	l. 10, n. 6	Aegyptii studentes math.

IN DE ANIMA

I De An.	l. 1, n. 15	Praecognoscenda.
	l. 2, n. 29	Def. mathematica et naturalis
	l. 3, n. 34	Ex. de pyramide
	l. 4, n. 48	De duplici abstractione
	n. 49	Unum et numerus in Platone

I De An.	l. 4, n.	50	Sensibilia "math." universalia
	l. 7, n.	92-106	Circa numeros in P l a t o n e
	l. 8, n.	114	P l a t o corpus ex superficiebus
	n.	115	De divisione in inf.
	l. 11, n.	168-177	Anima: numerus movens seipsum
II De An.	l. 3, n.	245	Math. ex notis quoad se et nos
	l. 3, n.	248-251	Ex. de def. in geom.
	l. 5, n.	288	Species rerum similes numeris
	n.	295	P l a t o non posuit ideam numeri
	n.	296	Ex. de ordine figurarum
	l. 11, n.	372	Cognitio primorum principiorum
	l. 12, n.	386	De sensibili communi
	n.	388-398	Amplior de eo disquisitio.
	l. 15, n.	434	Ex. pyramidis ad visionem
	l. 23, n.	530	De tribus dimensionibus
III De An.	l. 1, n.	577	Ex. I E u c l i d i s
	l. 3, n.	609	Ex. de puncto
	l. 5, n.	639	Intellectus principiorum
	n.	648	Idem repetit
	l. 8, n.	707-sq.	Duplex materia et duplex abstractio
	l. 10, n.	729	De intellectu agente et intellectu principiorum
	l. 11, n.	748	Ex. de diametro quadrati
	n.	752	Continuum indivisibile actu sed div. potentia
	n.	757	Quomodo habetur punctum
	l. 12, n.	768	Ex. de centro ad lineas

III De An.	l. 12, n. 781-784	Quomodo intelligit math.
	n. 791	Dependentia a sensibilibus in math.
	n. 826	Non erramus in primis principiis

IN DE SENSU ET SENSATO

De Sen.	l. 1, n. 1	Triplex scientia
	l. 2, n. 2	Continuum "sensibile commune"
	l. 4, n. 55	De projectione
	l. 6, n. 89	Ex. ex Pythagoricis
	l. 7, n. 98	De mensura qualitatum
	n. 99	Proportiones numerorum
	n. 100	Applicat ad qualitates
	n. 101	Ex. ex musica et coloribus de numeris
	l. 8, n. 113	De divisione multitudinis
	n. 114	De divisione magnitudinis
	l. 10, n. 137	Numeri sicut formae
	l. 11, n. 159	Figurae cum angulis
	n. 160	"Figurae sunt infinitae sicut et numeri"
	l. 14, n. 200	Dividit sensus, sicut imparem 5.
	l. 15	An qualitates sensibiles in inf. dividantur
	n. 219	Math. de modo videndi continuum
	n. 220	Corpus math. in inf. divisibile; non vero physicum
	l. 18, n. 266	De proportione in musica

De Sen.	l. 19, n.	288	Comparatio sensuum cum puncto et lineis
	n.	294	Distantia infinita

IN DE MEMORIA ET REMINISCENTIA

De mem.	l. 1, n.	307	Ex. de angulis trianguli
	l. 2, n.	312	Ex. de triangulo
	n.	313	Ex. de punctis et lineis
	l. 5, n.	370	Quae habent ordinem ut math.
	l. 7, n.	388	Anima potest intelligere duplum caeli
	n.	391	Similes figurae ex VI Euclidis
	n.	392	Demonstratio in I Euclidis
	n.	393-395	Demonstratio.

IN METAPHYSICAM

I Met.	Proemium		Math. abstracta "solum secundum rationem"
	l. 1, n.	33	Math. "maxime speculativae"
	l. 2, n.	36	Inf. lato sensu
	n.	47	Ar. certior Geom.
	l. 3, n.	66	Ex. de diametro quadrati
	n.	67	Geom. "scit causam" de diametro quadrati
	l. 7, n.	119-122	Op. Pythagoricorum: numeri substantiae rerum
	n.	120	"Inter math. numeri sunt priores".

I Met.	l. 8, n.	123-133	Prosequitur op. Pithagoricorum.
	n.	124	De numero pari (2 n)
	n.	125	Par (impar) principium infinitatis (finitatis)
	l. 8, n.	127	Punctus: unitas positionem habens etc.
	n.	130	Definitiones quadrati et rectanguli
	l. 9, n.	148	Resumit op. Pythagoreorum.
	l. 10, n.	157-158	Op. P l a t o n i s de math.
	n.	160	Confusio duplicis unius
	n.	161-168	Comparat Pythagoricos cum Platonicis.
	n.	169	Unum in sensibilibus
	l. 13, n.	202-207	Contra Pythagoricos
	l. 14, n.	208	Numerus quo minor, est certior
	n.	209	Math. sunt sempiterna
	n.	216	P l a t o: sensibilia, math. et species
	n.	217	P l a t o: ideae sunt numeri
	n.	222	P l a t o: math. media
	l. 15, n.	231	Inconveniens de participatione numerorum
	l. 16, n.	239-251	Contra P l a t o n e m.
	l. 17, n.	259	P l a t o: math. propter alia
	n.	260	De praedicatione math.
	n.	264	Entia math. a sensibilibus separata
	n.	268	Ex de geometra
	n.	269	Principia prima non obliviscuntur
II Met.	l. 1, n.	273	Arith. numeros, Geom. magnitudines

II Met.	l. 1, n.	288	De inventoribus Musicae
	l. 2, n.	291	Arith. Geom. scientiae speculativae
	l. 3, n.	303-312	In efficientibus non proc. in inf.
	l. 4, n.	325	In definitionibus non proc. in inf.
	l. 4, n.	326	Inf. non comprehenditur
	n.	327	In linea est inf. in potentia
	n.	329	Privatio est de ratione inf.
	l. 5, n.	334	Omnia sunt math.
	n.	336	Causae certitudinis math.
III Met.	l. 2, n.	349	Arith. et Geom. scientiae unius generis.
	l. 3, n.	363	De significatione "unius" et "entis"
	n.	366	Suntne math. principia rerum?
	n.	367	Suntne substantiae separatae?
	l. 4, n.	373	De numeris Platonicorum
	n.	375	De causa finali in Math.
	n.	380	Ex. de tetragonismo. VI Euclidis
	n.	381	Ex. de numeris
	n.	385	De bono in math.
	l. 6, n.	396	Scientiae subalternae
	l. 7, n.	404	Substantiae intermediae: math.
	n.	405	De duplici abstractione
	n.	410-422	Contra ponentes math. separata
	l. 8, n.	424	Explicatur nomen elementi in Euclide
	n.	433	Numerus subjectum paris
	n.	435	Inf. rerum differentiae
	n.	436	Duplex indivisio

III Met.	l. 8, n.	437	Non invenitur idea numeri in P l a t o n e
	l. 9, n.	444	Singularia sunt infinita
	n.	447	P l a t o n i s math. separata
	l. 9, n.	450	In materiis non proceditur in inf.
	n.	452	In formis non proceditur in inf.
	l. 10, n.	462	De uno
	n.	465	Deus origo unitatis
	l. 11, n.	468	P l a t o occultavit philosophiam sub math.
	l. 12, n.	491	Ex unitatibus componitur numerum
	n.	494-501	Contra P l a t o n e m
	l. 13, n.	501-514	Numeri et magnitudines substantiae rerum.
	l. 14, n.	511-518	An. praeter math. sint species
IV Met.	l. 1, n.	530	Scientiae considerant ens v.g. numerum
	n.	531	Ex. de angulis trianguli
	n.	532	Scientiae math. speculantur ens quantum
	l. 2, n.	555	In praedicatione entis non proc. in inf.
	n.	557	A v i c e n n a confundebat unum
	n.	559	Duplex unum
	n.	560	Numerus ad math. pertinet
	n.	563	Partes Math. Arith. principalior Geom.
	l. 3, n.	566	"Multitudo est aggregatio unitatum"
	l. 4, n.	571	Ex. de passionibus numeri

IV Met.	l. 4, n.	581	Par et impar Pythagoricorum
	n.	582	Natura paritatis et imparitatis
	n.	586	Geom. non agit de ente ut sic.
	l. 5, n.	588	Prima principia appropriat math.
	n.	592	Nec Arith. nec Geom. prima principia considerat
	l. 6, n.	607	In demonstratione non proc. in inf.
	l. 7, n.	615	Inf. ratione nominis
	n.	623	Inf. non est pertransire
	n.	624	In praedicatis non proc. in inf.
	n.	629	Idem repetit
	l. 9, n.	659	Ex. Math. de gradibus falsitatis
	l. 12, n.	681	Inf. sive indeterminatum
	l. 13, n.	686	Non proc. in inf. in causis
	l. 14, n.	702	Numerus inter sensibilia communia
	l. 15 n.	710	In demonstrationibus non proc. in inf.
	n.	717	Ex. dimidii et aequalis
	l. 16, n.	728	Ex. de pari et impari
	n.	729	Nullum medium aut inf. inter affirm. et negat.
	l. 17, n.	737	Ex. de diametro quadrati
	n.	743	In affirm. et negat. potest proc. in inf.
V Met.	l. 3, n.	786	Ex. ex numeri probatione
	l. 4, n.	801	Liber Elementorum E u c l i d i s
	n.	803	Ex. de puncto et unitate
	l. 7, n.	852	Definitio continui
	n.	854	Ex hac dif. gradus unitatis
	n.	863	Figura genus supremum

V Met.	l. 7, n. 864	Ex. de superficie
	n. 865	Def. puncti E u c l i d i s
	l. 8, n. 871	Linea circularis maxime una
	n. 872	Unum prima mensura numeri
	n. 874	Definitiones geometricae
	n. 875	De uno principio numeri
	l. 9, n. 895	Ex. de diametro quadrati
	n. 897	Pars continui potentialiter in toto
	l. 10, n. 900	Platonici et Pythagorici de corporibus
	n. 901	Confundebant duplex unum
	l. 11, n. 907	Aequale: unum in quantitate
	n. 912	In processu intellectus potest proc. in inf.
	l. 12. n. 915	Diversitas continuitatis
	l. 13, n. 944	Ex. de distantiis in musica
	n. 949	Naturaliter linea prior superficie
	n. 950	P l a t o e contrario
	n. 952	Dimidium rei prius re.
	l. 14, n. 971	Ex. de diametro quadrati
	n. 974	Potentia in linea
	l. 15, n. 977	Notio quanti
	n. 978	Definitiones puncti, lineae, caet.
	n. 983	In quantitate alia subjecta, aliae passiones
	n. 986	De tempore
	l. 16, n. 987	Ex. de circulo
	n. 989-992	De qualitate in math.
	n. 997	Haec qualitas quasi differentia substantialis

V Met.	l. 17, n. 1001	Ex. relationis quantitativae
	n. 1006-1022	Relationes quae consequuntur numerum
	n. 1024	Actiones math. ad similitudinem
	l. 18, n. 1042	Solum sunt tres dimensiones
	l. 19, n. 1045	Punctum terminus lineae
	l. 20, n. 1060	Quantitas cum et sine positione
	n. 1063	In habitibus non proc. in inf.
	l. 21, n. 1089	Partes speciei et materiae. Ex. math.
	n. 1093-1096	De sensu partis
	n. 1098-1108	De sensu totius
	n. 1109-1116	De sensu colori
	l. 22, n. 1121	In math. genus est subjectum proprium.
	n. 1125	Solidum resolvitur in superficies.
	n. 1128	Ex. de diametro quadrati
	n. 1131	Ex. de circulo et trianguli
	n. 1134	Ex. de numeris
	n. 1142	Ex. de angulis trianguli
	n. 1143	Ex. de angulis trianguli
VI Met.	l. 1, n. 1145	De math. agit Mathematicus
	n. 1146	Principia math. notiora quoad se et nos
	n. 1147	Scientia de numero, non de multitudine
	n. 1149	Geom. accipit a metaphysico quid magnitudinis
	n. 1160	De modo proprio math.

VI Met.	l. 1, n. 1161	Definitiones math. et physicae
	n. 1162	Math. separabilia secundum rationem
	n. 1163	Math. applicatae
	n. 1164	In generatione non proc. in inf.
	l. 1, n. 1165	Math. non de necessitate habent esse in materia
	n. 1169	Scientiae mediae et metaphysica
	l, 2, n. 1174	Inf. sensu lato
	n. 1175	Geom. speculatur de accidentibus per se.
	n. 1176	Scientia speculatur de entibus
	n. 1180	Est scientia de infinito
	l. 4, n. 1237	Ex. de diametro quadrati
VII Met.	l. 1, n. 1265	Op. Platonicorum et Pythagoricorum
	n. 1266	Op. L e u c i p p i
	n. 1267	Op. aliorum
	n. 1269	Remittit ad ultimos libros
	l. 2, n. 1270	Superficies substantiae
	n. 1283	Triplex dimensio
	n. 1305	De math. notis in se et quoad nos.
	l. 3, n. 1313	Ex. numeri
	l. 4, n. 1340	Unum dicitur multipliciter
	n. 1343	Ex. de def. mathem.
	n. 1349	In nominibus non proc. in inf.
	n. 1350	Ex. de impari
	l. 5, n. 1376	In essentiis non proc. in inf.
	l. 7, n. 1420	In generationibus non proc. in inf.
	l. 9, n. 1461	Ex. de definitione circuli

VII Met.	l. 9, n. 1464	Ex. anguli recti
	n. 1465 sq.	Angulus acutus prior recto?
	n. 1468	Def. math. et naturales
	n. 1471	Ex. de partibus numeri
	n. 1474	Ex. de partibus circuli
	n. 1475	Semicirculus ex materia
	n. 1480	Circulus cum individuali materia
	l. 10, n. 1483	Def. anguli acuti
	n. 1493	Circulus et circulo esse sunt idem
	n. 1494 sq.	Singularia in math.
	n. 1496	Etiam math. individuantur a mat.
	n. 1498	Ex. de angulo recto
	n. 1499	Ex. de circulo
	n. 1505	Origo notionis circuli
	n. 1506	Ex. de circulo
	n. 1507-1515	Op. aliorum de materia in math.
	n. 1517	Ex. de triangulo et circulo
	n. 1520-1522	Op. propria de materia in math.
	n. 1529	Ex. de circulo
	l. 11, n. 1534	Curvitas et cujus est
	l. 12, n. 1547	De tribus dimensionibus
	l. 13, n. 1588	Partes continui sunt in potentia
	n. 1589	De unitate numeri
	l. 15, n. 1622	Unum prius duobus
	l. 17, n. 1652	Communes animi conceptiones
VIII Met.	l. 1, n. 1683	Duplex abstractio.
	n. 1685	Remittit quaestionem ad ultimos libros

VIII Met.	l. 1, n. 1687	Formae separabiles ratione=mathem.
	l. 3, n. 1706	Nomen Linea=Dualitas et positio
	n. 1722	1) Def. est divisibilis in indivisibilia et numerus.
	n. 1723	2) Unitas addita numero variat speciem et def;
	n. 1725	3) Numerus est unus per se ipsum et def;
	n. 1727	4) Numerus non accipit magis et minus et def.
	l. 5, n. 1760	Duplex materia sensibilis et intelligibilis
	n. 1761	Def. math. ex materia et forma
	l. 5, n. 1762	De individuatione
	n. 1766	Ex. de trigono
IX Met.	l. 1, n. 1774	De "potentia" in geom. et in numeris
	l. 3, n. 1807 sq.	Ex. de diametro quadrati
	l. 5, n. 1830 sq.	Inf. actu et potentia
	l. 7, n. 1855	Semina et principia scientiarum
	l. 8, n. 1873	De necessariis. Totum majus parte
	l. 10, n. 1888-1894	De potentia in intelligentia veri et falsi
	l. 11, n. 1895-1919	De intelligentia veritatis et falsitatis
X Met.	l. 1, n. 1920-1936	De sensibus unius
	l. 2, n. 1937-1960	Unum mensura
	l. 3, n. 1961-1982	Unum non est substantia subsistens
	l. 4, n. 1985	Ratio unius.
	l. 4, n. 1988	Significatio unius
	n. 1989	Unum posterius multiudine

X Met.	l. 4, n. 1991	Multitudo est magis sensibilis
	n. 1993	Binarius differt a ternario
	n. 1998	Multitudo et numerus
	n. 2005	De lineis aequalibus
	n. 2008	De similitudine figurarum
	l. 5, n. 2023	Duo extrema unius distantiae
	l. 6, n. 2056	Inter par et impar non est medium
	l. 7, n. 2063	Op. Pythagoricorum
	l. 8, n. 2082	De quolibet numero est multiplex
	n. 2083	Nihil paucis duobus
	n. 2084	Generatio in inf. secundum Anaxagoram
	n. 2085	Inf. per divisionem in continuis
	n. 2090	Multitudo quasi genus numeri
	n. 2128	Par. et impar de numeris
XI Met.	l. 1, n. 2156	In math. non demonstratur per finalem
	n. 2158	Math. media juxta Platonicos
	n. 2162	Math. non sunt separata.
	n. 2165	Inquisitio de quibus math. consideret
	l. 2, n. 2173	Singularia sunt infinita
	n. 2184	De unitate numerorum
	n. 2185	Punctus terminus lineae
	n. 2186	Divisio lineae est punctus
	l. 3, n. 2202	Consideratio Math. V, X Euclidis
	l. 4, n. 2206	Prima principia accipiuntur a math.
	n. 2208	Prima principia partialiter in scientiis

XI Met.	l. 4, n. 2209	Pars Philosophiae: Math.
	l. 6, n. 2233	Math. de differentiis corporum
	l. 7, n. 2258	Differentia inter naturalem et math.
	n. 2261	De quibus considerat mathematicus
	n. 2264	Triplex scientia 2 Math.
	l. 8, n. 2276	Ex. de angulis trianguli
	l. 10, n. 2314-2354	De infinito
	l. 12, n. 2394	Infinitae permutationes
	l. 13, n. 2408	Linea recta est minima distantia
	n. 2414	De tribus speciebus extensi
	n. 2415	Punctus et unitas
XII Met.	l. 2, n. 2426	Duplex modus abstractionis
	l. 3, n. 2443	In materiis et formis non proc. in inf.
	l. 5, n. 2493	De mathematicis separatis
	l. 8, n. 2549	Nulla magnitudo est infinita
	l. 9, n. 2554	Additio in inf. in numeris
	n. 2563	De diversis scientiis mathematicis
	l. 10, n. 2567-2599	De numero motuum planetarum
	l. 12, n. 2658	De numero et continuo
	n. 2661	Contra Pythagoricos.

IN ETHICAM

I Eth.	l. 1, n. 2	Divisio scientiarum sine math.
	l. 2, n. 20	In finibus non proc. in inf.
	n. 21	Item
	n. 27	Politica et geom. usus non modus

I Eth.	l. 3, n.	36	Certitudo math. et moralis
	n.	37	Principia math. magis nobis nota et simpliciter.
	l. 4, n.	52	Modus procedendi in math.
	l. 6, n.	80	Allusio ad num. Platonicorum
	l. 7, n.	87	Pares Pythagoricorum
	l. 9, n.	113	De infinito sensu lato
	l. 11, n.	136	Proprium Geom. in linea
	n.	137	Principiorum cognitio diversa
	l. 16, n.	193	Ex. tetragoni
	l. 20, n.	240	Ratio math.
II Eth.	l. 1, n.	246	In addiscendo non proc. in inf.
	l. 6, n.	310	Divisio remissionis et intentionis
	l. 7, n.	319-330	De infinito sec. Pythagoricos
	l. 11, n.	370	De exemplis math.
III Eth.	l. 8, n.	474	Principia non quaeruntur in scientia
	n.	476	Demonstratio mathematica
	n.	482	In consiliis non proc. in inf.
V Eth.	l. 1, n.	896	Aequale inter major et minor
	l. 4, n.	993	Aequale medium inter plus et minus
	l. 5, n.	939	De proportione
	l. 6, n.	950	De proportione
	l. 7, n.	956-962	Ex. de linea applicata ad justitiam
	l. 8, n.	975-976	Ex. pro justitia
	l. 9, n.	984	Iterum
VI Eth.	l. 3, n.	1145-1149	De habitu scientiae
	l. 5, n.	1175-1179	De habitu intellectus
	l. 6, n.	1187	Ex. recti in figuris

VI Eth.	l. 7, n. 1208	Juvenes sunt geometrae, non prudentes.
	n. 1209-1210	Ausentia circa hoc.
	n. 1211	Ordo paedagogicus in scientiis
	n. 1214	Imaginatio in math.
	l. 9, n. 1251	Nullus geometra a natura
VII Eth.	l. 8, n. 1431	Suppositiones in math. fines in agilibus
X Eth.	l. 7, n. 2043	Delectatio in Geom.
	l. 15, n. 2162	Ex. speculativi: Geometra

EX QUAESTIONIBUS IN BOETIUM DE TRINITATE

De Trin.	q. 1, a 1, Sed. c.	De infinito
	c.	De campo intellectus agentis
	a. 2, ad. 3	De proportione
	a. 4, Sed. c. 2	De primis principiis
	ad. 2	De ternario. Arit. B o e t i i
	ad. 9	De ternario in ARISTOTELE
	q. 2, a. 2, ad. 5	De principiis in scientiis subalternatis,
	q. 3, a. 1, ad. 4	De primis principiis
	q. 4, a. 1, arg. 1	Arit. B o e t i i
	a. 2, ad. 3	De individuatione dimensionum
	ad. 6	De numero et quantitate
	a. 3, c.	De rationibus mathematicis.
	q. 5, a. 1, ad. 5	Musica sub arithmetica
	ad. 9	Metaphysica post mathematica
	ad. 10	Naturalis et Mathematica

De Trin. q. 5, a. 3, c. De abstractione mathematica.
a. 4, ad. 1 In math. quaedam naturalia assumuntur
ad. 7 Causae quibus utitur math.
q. 6, a. 1, p. 11 De methodo mathematica
ad. 2, c. De imaginatione in math.
a. 4, c. De primis principiis.

EX SUMMA THEOLOGICA

S. Th. 1, q. 1, a. 1, ad. 2 Diversae scientiae ex diverso medio
a. 2, c. Scientiae primae et derivatae
a. 3, c. De unitate scientiae
a. 5, c. De dignitate scientiarum.
a. 6, ad. 2 De principiis scientiarum
a. 8, c. Scientiae inferiores non probant principia
q. 2, a. 1, c. Per se notum in primis principiis
a. 2, ad. 2 Significatio nominis ad exsistentiam
a. 3 Proc. in inf. in tribus primis viis
q. 3, a. 1, c. Continuum divisibile in inf.
a. 5, c. Punctus et unitas reducuntur ad quant.
ad. 2 De mensura rerum.
q. 5, a. 3, ad. 4 De bonitate in mathematicis.
a. 5, c. Definitiones et numeri
q. 6, a. 6, a. 2, ob. 3 Dulcedo non dicitur major linea
a. 3, ad. 1 Ratio unius in indivisione

S. Th. I q. 7, a. 1, ad. 2 Infinitum quantitatis ex materia

a. 2, c. Infin. secundum quid

a. 3, c. Infin. magnitudine

ad. 1 Infin. pro Geometra

ad. 3 Non in additione, sed in divisione

a. 4, c. Inf. multitudine

ad. 2 Infinitas figurarum

q. 8, a. 2, ad. 2 Duplex indivisibile

a. 4, ad. 2 Numerus non est ubique

q. 10, a. 1, ad. 1 Punctus per negationem cognoscitur

a. 4, c. De mensuratione temporis

a. 6, c. Duplex numerus: abstractus et concretus

q. 11, a. 1, ad. 1 Duplex unum

a. 2 Continuum est totum homogeneum

ad. 4 Definitiones negativae

a. 3, ad. 2 Duplex unum

a. 4, c. De puncto et unitate, ut entia

q. 12, a. 1, ad. 2 De cognitione inf.

ad. 4 Duplex proportio.

a. 7, c. Math. comprehenduntur

a. 12, c. Dependentia a sensibilibus

q. 14, a. 1, ad. 2 Intellectus et scientia

a. 6, c. Diversitas linearum ex situ.

a. 10, ad. 1 Punctum et unitas

a. 12, ad. obj. De infinito

q. 16, a. 4, Sed. c. Bonum non est in math.

S. Th. I q. 16, a. 4, ad. 2 Prius ratione quod prius cadit in intellectu.

a. 7, ad. 1 Ratio circuli et 2+3=5 aeternae in Deo

q. 17, a. 1, c. Ex. de diametro quadrati

a. 2, c. Divisio sensibilium respectu veritatis

a. 3, c. Def. circuli falsa def. hominis.

ad. 2 Def. primorum principiorum

q. 18, a. 2, c. Corpus ponitur pro tribus dimensionibus.

q. 19, a. 3, c. Ex. necessitatis par vel impar

q. 23, a. 7, c. De numero praedestinatorum.

q. 25, a. 2, ad. 2 De potentia infinita et velocitate

a. 6, c. Additio differentiae sicut unitatis

q. 27, a. 3, ad. 1 Proc. in inf. in "Processionibus"

q. 28, a. 4, ad. 2 Proc. in inf. in actibus intellectus

q. 30, a. 1, ad. 4 Duplex numerus: absolutus et concretus

a. 2, ad. 5 Duplex numerus: absolutus et concretus

q. 30, a. 3, c. Duplex numerus: praedicam. et transcend.

q. 31, a. 1, ad. 2 Unitas nominis collectivi

ad. 3 Trinum non triplex. Ar. Boetti

q. 39, a. 8, c. 1) Ens, 2) Unum, etc.

q. 40, a. 3, c. Duplex abstractio

q. 42, a. 1, c. De numero inaequalium

ad. 1 Duplex quantitas

a. 2, ob. 1 Generatio lineae a puncto

a. 3, c. Punctus principium secundum situm

S. Th. I, q. 84, a. 3, c. Homo non obliviscitur naturalia
ad. 3 Responsio ad Geometriam Nenonis
q. 85, a. 1, ad. 1 Duplex abstractio respectu veritatis
ad. 2 Triplex abstractio a materia
a. 4, c. Impossibile ut corpus diversis figuris terminetur
ad. 3 De intellectione partium in toto.
a. 6, ad. 6 Circa prima principia non erratur Ex. math.
a. 8, c. Triplex modus indivisibilis
ad. 2 De unitate et puncto. EUCLIDES
q. 86, a. 2, c. De cognitione infiniti
ad. 2 Species numerorum et figurarum
q. 87, a. 1, ad. 1 Prima principia per se nota
a. 2, ad. 3 Principia magis nota conclusionibus
a. 3, ad. 2 In intellectu datur proc. in inf.
q. 94, a. 3, c. Quae virtualiter exsistunt in primis principiis
q. 104, a. 4, ad. 2 Duratio infinita
q. 108, a. 2, ad. 1 Ordo dupliciter dicitur
q. 112, a. 4, ad. 2 De numero angelorum
q. 115, a. 3, c. Omnis multitudo ab unitate procedit
q. 117, a. 1, c. Prima principia cognoscuntur intellectu agente.
q. 118, a. 2, c. Unitas variat speciem numeri.
S. Th. 1, 2, q. 1, a. 4, c. In finibus non datur proc. in inf.
ad. 2 De infinito in aliis ordinibus.
a. 5, c. Principium est quod naturaliter cognitum

S. Th. I, 2 q. 2, a. 6, c. Quaedam infinitas.
q. 3, a. 6, c. Prima principia sunt per sensum accepta.
q. 4, a. 1, c. Disciplina requiritur ad scientiam
q. 8, a. 1, ad. 3 De ente rationis
1, 2, q. 9, a. 4, c. In voluntate non proc. in inf.
q. 13, a. 3, c. Principium unius scientiae, conclusio alterius
q. 14, a. 2, c. Oportet supponere principia
a. 5, c. Principia supponuntur
a. 6, c. In consiliis non proc. in inf.
ad. 1 Singularia infinita in potentia
q. 15, a. 3, ad. 1 De principiis est intellectus, non scientia
q. 17, a. 4, c. De uno et multitudine
a. 5, ad. 3 In actibus voluntatis non proc. in inf.
a. 6, c. Primis principiis naturaliter assentit intellectus
a. 9, ad. 2 Principia naturaliter cognita
q. 18, a. 7, Sed. C. Infinitum sensu vulgari
a. 10, c. In rebus non datur proc. in inf.; in intellectu
q. 20, a. 2, c. Superficies una quantitate, multa ex coloribus
q. 27, a. 2, ad. 1 Qui quaerit scientiam, non omnino ignorat eam.
q. 29, a. 2, ad. 1 Species numerorum et figurarum
q. 30, a. 4, c. Concupiscentia est omnino infinita
ad. 2 Potestas infinita rationis

S. Th. I,2, q. 33, a. 1, c. Latitudo est una dimensio
a. 3, c. Ex. de angulis trianguli
q. 35, a. 8, c. Astrologia et perspectiva species mathem.
q. 40, a. 6, c. Multiplicatio timoris
q. 49, a. 2, c. Duae species qualitatis ex superficie
q. 50, a. 4, c. De intellectu, habitu principiorum
q. 51, a. 1, c. Habitus principiorum partim naturalis
a. 2, c. Habitus scientiarum causatur ex actibus
a. 3, c. Quandoque uno actu
q. 51, a. 1, c. Species rerum sicut numeri et figurae
a. 2, c. Scientia potest augeri per plures conclusiones.
q. 53, a. 1, c. Habitus principiorum causatur ex intellectu agente.
q. 54, a. 1, ad. 3 Corpus terminatur per unam figuram
a. 2, ad. 2 Astrologus demonstrat per media math.
q. 55, a. 4, ad. 1 Quod apprehendimus putamus ens.
q. 57, a. 2, c. De intellectu principiorum
ad. 1 Sapientia iudicat etiam de principiis
ad. 2 Duplex modus considerandi principium
a. 3, ad. 3 In speculativis aliquid est operis, numerari, etc.
a. 4 Scientia dependet ab intellectu.
q. 58, a. 4, c. Per intellectum cognoscuntur principia

S. Th. I, 2, q. 60, a. 1, ad. 3 Infiniti numero

q. 61, a. 2, c. Quomodo accipitur numerus aliquorum

q. 62, a. 3, c. Prima principia cognoscuntur per lumen intellectus

q. 64, a. 3, ad. 2 In virtutibus non proc. in inf.

q. 65, a. 1, ad. 3 Prima principia non pendent a conclusionibus

q. 66, a. 3, ad. 1 Objecta disciplinarum sunt permanentia

a. 5, ad. 4 Prima principia pendent a terminis

q. 70, a. 1, ad. 1 De proc. in inf. in fructibus

q. 72, a. 4, ad. 2 De divisione numerorum et figurarum

q. 75, a. 4, ad. 3 De proc. in inf. in peccato

q. 76, a. 2, c. Homo non tenetur scire theoremata Geom.

q. 85, a. 2, c. De diminutione finiti in inf.

q. 87, a. 4, Sed. c. Non est infinitum infinito majus.

q. 90, a. 1, c. Primum in genere est mensura: unum in numero

q. 91, a. 3, c. Principia indemonstrabilia naturaliter cognita

ad. 1 Est naturalis participatio divinae sapientiae

a. 2, c. Distinctio est causa numeri.

q. 94, a. 1, c. Principia non sunt habitus sed ipsorum est h.

a. 2, c. Principia prima demonstrationum

q. 94, a. 4, c. Communes animi conceptiones

q. 112, a. 5, c. Indemostrabilia universalia principia

IN LIBROS SENTENTIARUM

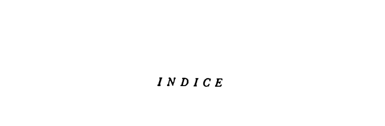
EX SUMMA CONTRA GENTILES

DE VERITATE

DE POTENTIA

EX ALIIS OPERIBUS

De ente et essentia,	c. 2	Def. naturalis et math.
Comp. Theol.	c. 6 2	Duplex abstractio
De instantibus,	c. 1	De mensura



INDICE

Se terminó de imprimir el día
31 de julio de 1952, en los Ta-
lleres de la Editorial Jus.
— Mejía 19, México, D. F. —
El tiro fue de 500 ejemplares.

LAUS DEO